

球面調和函数変換

竹広真一

平成 19 年 11 月 5 日

この文書は, 球面調和関数変換の基本的な定式化を行う.

1 球面調和函数変換

切断波数 M の球面調和函数逆変換は次のように表される.

$$g(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^M \sum_{m=-n}^n s_n^m P_n^m(\mu) \exp(im\lambda) \quad (1)$$

ここで λ は経度, $\mu = \sin\varphi$ は \sin 緯度である. $P_n^m(\mu)$ はルジャンドル陪函数であり, ISPACK では 2 に正規化されたものを用いている.

$$P_n^m(\mu) = \sqrt{(2n+1) \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \frac{1}{2^n n!} (1-\mu^2)^{|m|/2} \frac{d^{n+|m|}}{d\mu^{n+|m|}} (\mu^2-1)^n}, \quad \int_{-1}^1 \{P_n^m(\mu)\}^2 d\mu = 2. \quad (2)$$

$g(\lambda, \mu)$ が実数であることから s_n^m は

$$s_n^{-m} = \{s_n^m\}^* \quad (3)$$

の関係を満たしている¹. この制約から逆変換を次のように書き直すことができる.

$$\begin{aligned} \sum_{m=-n}^n s_n^m e^{im\lambda} & \text{を展開して } \cos(m\lambda), \sin(m\lambda) \text{ の項を取りだすと} \\ s_n^m e^{im\lambda} + s_n^{-m} e^{-im\lambda} &= \operatorname{Re}[s_n^m] \cos(m\lambda) + i \operatorname{Re}[s_n^m] \sin(m\lambda) + i \operatorname{Im}[s_n^m] \cos(m\lambda) - \operatorname{Im}[s_n^m] \sin(m\lambda) \\ & \quad + \operatorname{Re}[s_n^{-m}] \cos(m\lambda) - i \operatorname{Re}[s_n^{-m}] \sin(m\lambda) + i \operatorname{Im}[s_n^{-m}] \cos(m\lambda) + \operatorname{Im}[s_n^{-m}] \sin(m\lambda) \end{aligned}$$

$$g(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^M \left[a_n^0 P_n^0(\mu) + \sum_{m=1}^n \left\{ a_n^m P_n^m(\mu) \sqrt{2} \cos(m\lambda) - b_n^m P_n^m(\mu) \sqrt{2} \sin(m\lambda) \right\} \right]. \quad (4)$$

ただし

$$a_n^0 = \operatorname{Re}[s_n^0], \quad a_n^m = \sqrt{2} \operatorname{Re}(s_n^m), \quad b_n^m = \sqrt{2} \operatorname{Im}(s_n^m), \quad (m = 1, 2, \dots, n, n = 1, \dots, M) \quad (5)$$

2 ルジャンドル陪函数

補間の際必要となるルジャンドル陪函数の性質を記しておく. 2 で正規化されているため通常のルジャンドル陪函数と性質が変わることに注意されたい. 通常のルジャンドル陪函数を \tilde{P}_n^m , 2 で正規化されたルジャンドル陪函数を P_n^m と表すと

$$\tilde{P}_n^m(\mu) = (-i)^m \sqrt{\frac{1}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}} P_n^m(\mu) \quad (6)$$

である². 通常のルジャンドル函数の性質として,

$$\tilde{P}_m^m(\mu) = (-1)^m (2m-1)!! (1-\mu^2)^{m/2}, \quad \tilde{P}_{m+1}^m(\mu) = \mu(2m+1) \tilde{P}_m^m. \quad (7)$$

三項漸化式

$$\tilde{P}_{n+1}^m(\mu) = \frac{2n+1}{n-m+1} \mu \tilde{P}_n^m(\mu) - \frac{n+m}{n-m+1} \tilde{P}_{n-1}^m(\mu). \quad (8)$$

低次のルジャンドル陪函数

$$\tilde{P}_1^0(\mu) = \mu, \quad \tilde{P}_1^1(\mu) = -\sqrt{1-\mu^2}, \quad (9)$$

$$\tilde{P}_2^0(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1), \quad \tilde{P}_2^1(\mu) = -3\mu\sqrt{1-\mu^2}, \quad \tilde{P}_2^2(\mu) = 3(1-\mu^2). \quad (10)$$

積分

$$\int_{-1}^1 \{\tilde{P}_n^m(\mu)\}^2 d\mu = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \quad (11)$$

$$= (\operatorname{Re}[s_n^m] + \operatorname{Re}[s_n^{-m}]) \cos(m\lambda) + (-\operatorname{Im}[s_n^m] + \operatorname{Im}[s_n^{-m}]) \sin(m\lambda) \\ + i(\operatorname{Im}[s_n^m] + \operatorname{Im}[s_n^{-m}]) \cos(m\lambda) + i(\operatorname{Re}[s_n^m] - \operatorname{Re}[s_n^{-m}]) \sin(m\lambda).$$

虚数部が 0 になる条件から $\operatorname{Re}[s_n^m] = \operatorname{Re}[s_n^{-m}]$, $\operatorname{Im}[s_n^m] = -\operatorname{Im}[s_n^{-m}]$, すなわち $s_n^{-m} = \{s_n^m\}^*$ である.

²ISPACK で用いているルジャンドル陪函数は符号の定義も違っていることに注意されたい

2 で正規化されたルジャンドル陪函数に書き換えると, $m, m+1$ 次のルジャンドル陪函数は³,

$$P_m^m(\mu) = \frac{\sqrt{(2m+1)!}}{2^m m!} (1 - \mu^2)^{m/2}. \quad (12)$$

$$P_{m+1}^m(\mu) = \mu \sqrt{2m+3} P_m^m(\mu). \quad (13)$$

三項漸化式は⁴

$$P_{n+1}^m(\mu) = \sqrt{\frac{(2n+3)(2n+1)}{(n-m+1)(n+m+1)}} \mu P_n^m(\mu) - \sqrt{\frac{(2n+3)(n+m)(n-m)}{(2n-1)(n+m+1)(n-m+1)}} P_{n-1}^m(\mu). \quad (14)$$

3

$$\begin{aligned} \tilde{P}_m^m(\mu) &= (-1)^m \sqrt{\frac{(2m)!}{2m+1}} P_m^m(\mu) = (-1)^m (2m-1)!! (1 - \mu^2)^{m/2}, \\ P_m^m(\mu) &= \sqrt{\frac{2m+1}{(2m)!}} (2m-1)!! (1 - \mu^2)^{m/2} = \sqrt{\frac{2m+1}{(2m)!}} \frac{(2m)!}{2^m m!} (1 - \mu^2)^{m/2} \\ &= \frac{\sqrt{(2m+1)(2m)!}}{2^m m!} (1 - \mu^2)^{m/2}, \\ &= \frac{\sqrt{(2m+1)!}}{2^m m!} (1 - \mu^2)^{m/2}. \\ \tilde{P}_{m+1}^m(\mu) &= \sqrt{\frac{(2m+1)!}{2m+3}} P_{m+1}^m(\mu) = \mu(2m+1) \tilde{P}_m^m = \mu(2m+1) \sqrt{\frac{(2m)!}{2m+1}} P_m^m(\mu), \\ P_{m+1}^m(\mu) &= \mu(2m+1) \sqrt{\frac{(2m)!}{2m+1} \frac{2m+3}{(2m+1)!}} P_m^m(\mu) = \mu(2m+1) \sqrt{\frac{2m+3}{(2m+1)^2}} P_m^m(\mu) \\ &= \mu \sqrt{2m+3} P_m^m(\mu). \end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{1}{2n+3} \frac{(n+m+1)!}{(n-m+1)!}} P_{n+1}^m(\mu) = \sqrt{\frac{1}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{2n+1}{n-m+1}} \mu P_n^m(\mu) \\ &- \sqrt{\frac{1}{2n-1} \frac{(n+m-1)!}{(n-m-1)!} \frac{n+m}{n-m+1}} P_{n-1}^m(\mu), \\ P_{n+1}^m(\mu) &= \sqrt{\frac{2n+3}{2n+1} \frac{(n-m+1)!}{(n+m+1)!} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{2n+1}{n-m+1}} \mu P_n^m(\mu) \\ &- \sqrt{\frac{2n+3}{2n-1} \frac{(n-m+1)!}{(n+m+1)!} \frac{(n+m-1)!}{(n-m-1)!} \frac{n+m}{n-m+1}} P_{n-1}^m(\mu), \\ &= \sqrt{\frac{2n+3}{2n+1} \frac{n-m+1}{n+m+1} \frac{2n+1}{n-m+1}} \mu P_n^m(\mu) - \sqrt{\frac{2n+3}{2n-1} \frac{(n-m+1)(n-m)}{(n+m+1)(n+m)} \frac{n+m}{n-m+1}} P_{n-1}^m(\mu), \\ &= \sqrt{\frac{(2n+3)(2n+1)}{(n-m+1)(n+m+1)}} \mu P_n^m(\mu) - \sqrt{\frac{(2n+3)(n+m)(n-m)}{(2n-1)(n+m+1)(n-m+1)}} P_{n-1}^m(\mu). \end{aligned}$$

低次のルジャンドル陪関数は

$$P_1^0(\mu) = \sqrt{3}\mu, \quad P_1^1(\mu) = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\mu^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{1-\mu^2}, \quad (15)$$

$$P_2^0(\mu) = \frac{\sqrt{5}}{2}(3\mu^2 - 1), \quad P_2^1(\mu) = \sqrt{\frac{5}{6}}3\mu\sqrt{1-\mu^2}, \quad = \sqrt{\frac{30}{2}}\mu\sqrt{1-\mu^2}, \quad (16)$$

$$P_2^2(\mu) = \sqrt{\frac{5}{24}}3(1-\mu^2) = \frac{\sqrt{120}}{24}3(1-\mu^2) = \frac{\sqrt{30}}{4}(1-\mu^2). \quad (17)$$

積分

$$\int_{-1}^1 \{P_n^m(\mu)\}^2 d\mu = 2. \quad (18)$$

3 補間の計算

今, 関数 $g(\lambda, \mu)$ の球面調和関数変換 s_n^m が与えられたとき任意の点 (λ, μ) における関数の値を Clenshow's Recurrence Formula ⁵ を用いて計算する.

⁵Clenshow's Recurrence Formula:
関数 $f(x)$ がとある関数系 $F_k(x)$ で

$$f(x) = \sum_0^N c_k F_k(x)$$

と表されているとする. さらに関数系が次の漸化式

$$F_{n+1}(x) = \alpha(n, x)F_n(x) + \beta(n, x)F_{n-1}(x)$$

を満たしているとする. このとき漸化式

$$y_{N+2} = y_{N+1} = 0, \quad y_k = \alpha(k, x)y_{k+1} + \beta(k+1, x)y_{k+2} + c_k$$

で定義される量 $y_k, (k = N, N-1, \dots, m)$ を用いると $f(x)$ を求めるための関数系の和は

$$f(x) = \beta(m+1, x)F_m(x)y_{m+2} + F_{m+1}(x)y_{m+1} + F_m(x)c_m$$

と計算することができる.

「証明」

y_k に関する漸化式を c_k について解き, $f(x)$ の式に代入すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_0^N c_k F_k(x) \\ &= y_N F_N(x) \\ &\quad + [y_{N-1} - \alpha(N-1, x)y_N] F_{N-1}(x) \\ &\quad + [y_{N-2} - \alpha(N-2, x)y_{N-1} - \beta(N-1, x)y_N] F_{N-2}(x) \\ &\quad + [y_{N-3} - \alpha(N-3, x)y_{N-2} - \beta(N-2, x)y_{N-1}] F_{N-3}(x) \end{aligned}$$

ルジャンドル逆変換の和の順序を変えて

$$\begin{aligned} g(\lambda, \mu) &= \sum_{n=0}^M a_n^0 P_n^0(\mu) + \sum_{m=1}^n \sum_{n=m}^M + \left\{ a_n^m P_n^m(\mu) \sqrt{2} \cos(m\lambda) - b_n^m P_n^m(\mu) \sqrt{2} \sin(m\lambda) \right\} \\ &= \sum_{n=0}^M a_n^0 P_n^0(\mu) + \sum_{m=1}^n \sqrt{2} \cos(m\lambda) \sum_{n=m}^M a_n^m P_n^m(\mu) - \sum_{m=1}^n \sqrt{2} \sin(m\lambda) \sum_{n=m}^M b_n^m P_n^m(\mu) \end{aligned}$$

n についての和は Clenshow's Recurrence Formula で計算できる. 漸化式から

$$\alpha(n, m, x) = \sqrt{\frac{(2n+3)(2n+1)}{(n-m+1)(n+m+1)}} x, \beta(n, m) = -\sqrt{\frac{(2n+3)(n+m)(n-m)}{(2n-1)(n+m+1)(n-m+1)}}$$

といて, $f_m(\mu) = \sum_{n=m}^M a_n^m P_n^m(\mu)$ は

$$\begin{aligned} y_{K+2} &= y_{K+1} = 0, \\ y_k &= \alpha(k, m, \mu) y_{k+1} + \beta(k+1, m) y_{k+2} + a_k^m, \quad (k = K, K-1, \dots, m+1) \quad (19) \\ f_m(\mu) &= \beta(m+1, m) y_{m+2} P_m^m(\mu) + P_{m+1}^m(\mu) y_{m+1} + a_m^m P_m^m(\mu) \\ &= \beta(m+1, m) y_{m+2} P_m^m(\mu) + \mu \sqrt{2m+3} P_m^m(\mu) y_{m+1} + a_m^m P_m^m(\mu) \\ &= \left[a_m^m + \beta(m+1, m) y_{m+2} + \mu \sqrt{2m+3} y_{m+1} \right] P_m^m(\mu). \end{aligned} \quad (20)$$

ただし $P_m^m(\mu) = \frac{\sqrt{(2m+1)!}}{2^m m!} (1-\mu^2)^{m/2}$ と計算することができる. $\sum_{n=m}^M b_n^m P_n^m(\mu)$

の和も同様に計算できる. $\sum_{n=0}^M a_n^0 P_n^0(\mu)$ の場合は $f_0(\mu) = \sum_{n=0}^M a_n^0 P_n^0(\mu)$ は

$$\begin{aligned} y_{K+2} &= y_{K+1} = 0, \\ y_k &= \alpha(k, 0, \mu) y_{k+1} + \beta(k+1, 0) y_{k+2} + a_k^0, \quad (k = K, K-1, \dots, 1), \quad (21) \\ f_0(\mu) &= \beta(1, 0) y_2 P_0^0(\mu) + P_1^0(\mu) y_1 + a_0^0 P_0^0(\mu) = \beta(1, 0) y_2 + \sqrt{3} \mu y_1 + a_0^0 \quad (22) \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned} &+ [y_{m+2} - \alpha(m+2, x) y_{m+3} - \beta(m+3, x) y_{m+4}] F_{m+2}(x) \\ &+ [y_{m+1} - \alpha(m+1, x) y_{m+2} - \beta(m+2, x) y_{m+3}] F_{m+1}(x) \\ &+ [c_m + \beta(m+1, x) y_{m+2} - \beta(m+1, x) y_{m+2}] F_m(x) \end{aligned}$$

最後の項だけ c_0 のまま残し, $\beta(1, x) y_2$ をわざと足し引きしている. 各 y_k について整理すると

$$\begin{aligned} f(x) &= y_N [F_N - \alpha(N-1, x) F_{N-1} - \beta(N-1, x) F_{N-2}] \\ &\quad + y_{N-1} [F_{N-1} - \alpha(N-2, x) F_{N-2} - \beta(N-2, x) F_{N-3}] \\ &\quad \dots \\ &\quad + y_{m+2} [F_{m+2} - \alpha(m+1, x) F_{m+1} - \beta(m+1, x) F_m] \\ &\quad + y_{m+1} F_{m+1} + c_m F_m + \beta(m+1, x) y_{m+2} F_m \end{aligned}$$

$F_k(x)$ の漸化式より $k = N, N-1, \dots, 2$ まではキャンセルし, 残りの項は最後の行だけになる. したがって

$$f(x) = \beta(m+1, x) y_{m+2} F_m + y_{m+1} F_{m+1} + c_m F_m$$

4 エネルギー・エンストロフィースペクトルの計算

今, 流線関数 $\psi(\lambda, \varphi)$ の球面調和函数展開係数 a_n^m, b_n^m が与えられたとき全エネルギー E 次のように計算される.

$$\begin{aligned}
 E &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right)^2 \right] \cos \varphi d\varphi d\lambda \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\psi \cos \varphi \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} d\lambda - \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \psi \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) \cos \varphi d\varphi d\lambda \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{\psi}{\cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) \right]_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\psi}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} \cos \varphi d\varphi d\lambda \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ - \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\psi \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) \right] \cos \varphi d\varphi d\lambda \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} \cos \varphi d\varphi d\lambda \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ - \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \psi \left[\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\psi}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} \right] \cos \varphi d\varphi d\lambda \right\} \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \psi \nabla^2 \psi \cos \varphi d\varphi d\lambda. \tag{23}
 \end{aligned}$$

ここで, 球面調和函数展開係数を用いると

$$\psi = \sum_{n=0}^M a_n^0 P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=0}^M \sum_{m=1}^n \sqrt{2} a_n^m P_n^m(\sin \varphi) \cos(m\lambda) - \sum_{n=0}^M \sum_{m=1}^n \sqrt{2} b_n^m P_n^m(\sin \varphi) \sin(m\lambda) \tag{24}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
 E &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \psi \nabla^2 \psi \cos \varphi d\varphi d\lambda \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\sum_{n=0}^M a_n^0 P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=0}^M \sum_{m=1}^n \sqrt{2} a_n^m P_n^m(\sin \varphi) \cos(m\lambda) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{n=0}^M \sum_{m=1}^n \sqrt{2} b_n^m P_n^m(\sin \varphi) \sin(m\lambda) \right] \\
 &\quad \left[\sum_{n'=0}^M n'(n'+1) a_{n'}^0 P_{n'}'(\sin \varphi) + \sum_{n'=0}^M \sum_{m'=1}^{n'} \sqrt{2} n'(n'+1) a_{n'}^{m'} P_{n'}^{m'}(\sin \varphi) \cos(m'\lambda) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{n'=0}^M \sum_{m'=1}^{n'} \sqrt{2} n'(n'+1) b_{n'}^{m'} P_{n'}^{m'}(\sin \varphi) \sin(m'\lambda) \right] \cos \varphi d\varphi d\lambda \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^M \sum_{n'=0}^M n'(n'+1) a_n^0 a_{n'}^0 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_n(\sin \varphi) P_{n'}'(\sin \varphi) \cos \varphi d\varphi d\lambda
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^M \sum_{m=1}^n \sum_{n'=0}^M \sum_{m'=0}^{n'} 2n'(n'+1) a_n^m a_{n'}^{m'} \\
 & \quad \times \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_n^m(\sin \varphi) \cos(m\lambda) P_{n'}^{m'}(\sin \varphi) \cos(m'\lambda) \cos \varphi d\varphi d\lambda \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^M \sum_{m=1}^n \sum_{n'=0}^M \sum_{m'=0}^{n'} 2n'(n'+1) b_n^m b_{n'}^{m'} \\
 & \quad \times \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_n^m(\sin \varphi) \sin(m\lambda) P_{n'}^{m'}(\sin \varphi) \sin(m'\lambda) \cos \varphi d\varphi d\lambda \\
 = & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^M \sum_{n'=0}^M n'(n'+1) a_n^0 a_{n'}^0 4\pi i \delta_{n,n'} \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^M \sum_{m=1}^n \sum_{n'=0}^M \sum_{m'=1}^{n'} 2n'(n'+1) a_n^m a_{n'}^{m'} \pi \delta_{m,m'} \cdot 2\delta_{n,n'} \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^M \sum_{m=1}^n \sum_{n'=0}^M \sum_{m'=1}^{n'} 2n'(n'+1) b_n^m b_{n'}^{m'} \pi \delta_{m,m'} \cdot 2\delta_{n,n'} \\
 = & 4\pi \left[\frac{1}{2} \sum_{n=0}^M n(n+1) |a_n^0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^M \sum_{m=1}^n n(n+1) |a_n^m|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^M \sum_{m=1}^n n(n+1) |b_n^m|^2 \right]
 \end{aligned}$$

これより全エネルギーを (n, m) 各成分にわけることができて, $\frac{1}{2}n(n+1)|a_n^0|^2$ をエネルギースペクトルの $(n, 0)$ 成分, $\frac{1}{2}n(n+1)|a_n^m|^2$ をエネルギースペクトルの (n, m) 成分, $\frac{1}{2}n(n+1)|b_n^m|^2$ をエネルギースペクトルの $(n, -m)$ 成分と呼ぶ.

同じような計算を全エンストロフィーにも行うことができる.

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\nabla^2 \psi)^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\sum_{n=0}^M n(n+1) a_n^0 P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=0}^M \sum_{m=1}^n \sqrt{2} n(n+1) a_n^m P_n^m(\sin \varphi) \cos(m\lambda) \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{n=0}^M \sum_{m=1}^n \sqrt{2} n(n+1) b_n^m P_n^m(\sin \varphi) \sin(m\lambda) \right] \\
 & \quad \left[\sum_{n'=0}^M n'(n'+1) a_{n'}^0 P_{n'}'(\sin \varphi) + \sum_{n'=0}^M \sum_{m'=1}^{n'} \sqrt{2} n'(n'+1) a_{n'}^{m'} P_{n'}^{m'}(\sin \varphi) \cos(m'\lambda) \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{n'=0}^M \sum_{m'=1}^{n'} \sqrt{2} n'(n'+1) b_{n'}^{m'} P_{n'}^{m'}(\sin \varphi) \sin(m'\lambda) \right] \cos \varphi d\varphi d\lambda \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^M \sum_{n'=0}^M n(n+1) n'(n'+1) a_n^0 a_{n'}^0 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_n(\sin \varphi) P_{n'}'(\sin \varphi) \cos \varphi d\varphi d\lambda
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^M \sum_{m=1}^n \sum_{n'=0}^M \sum_{m'=0}^{n'} 2n(n+1)n'(n'+1) a_n^m a_{n'}^{m'} \\
 & \quad \times \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_n^m(\sin \varphi) \cos(m\lambda) P_{n'}^{m'}(\sin \varphi) \cos(m'\lambda) \cos \varphi d\varphi d\lambda \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^M \sum_{m=1}^n \sum_{n'=0}^M \sum_{m'=0}^{n'} 2n(n+1)n'(n'+1) b_n^m b_{n'}^{m'} \\
 & \quad \times \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_n^m(\sin \varphi) \sin(m\lambda) P_{n'}^{m'}(\sin \varphi) \sin(m'\lambda) \cos \varphi d\varphi d\lambda \\
 = & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^M \sum_{n'=0}^M n(n+1)n'(n'+1) a_n^0 a_{n'}^0 4\pi \delta_{n,n'} \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^M \sum_{m=1}^n \sum_{n'=0}^M \sum_{m'=0}^{n'} 2n(n+1)n'(n'+1) a_n^m a_{n'}^{m'} \pi \delta_{m,m'} \cdot 2\delta_{n,n'} \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^M \sum_{m=1}^n \sum_{n'=0}^M \sum_{m'=0}^{n'} 2n(n+1)n'(n'+1) b_n^m b_{n'}^{m'} \pi \delta_{m,m'} \cdot 2\delta_{n,n'} \\
 = & 4\pi \left[\frac{1}{2} \sum_{n=0}^M n^2(n+1)^2 |a_n^0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^M \sum_{m=-n}^n n^2(n+1)^2 |a_n^m|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^M \sum_{m=-n}^n n^2(n+1)^2 |b_n^m|^2 \right]
 \end{aligned}$$

これより全エンストロフィを (n, m) 各成分にわけることができて, $\frac{1}{2}n^2(n+1)^2|a_n^0|^2$ をエネルギー・スペクトルの $(n, 0)$ 成分, $\frac{1}{2}n^2(n+1)^2|a_n^m|^2$ をエネルギー・スペクトルの (n, m) 成分, $\frac{1}{2}n^2(n+1)^2|b_n^m|^2$ をエネルギー・スペクトルの $(n, -m)$ 成分と呼ぶ.