三次元TEM方程式系及び残差循環に関する一考察

高谷康太郎（JAMSTEC）　2012年5月29日

・**Transformed Eulerian-Mean (TEM) 方程式系:**
波と平均流の相互作用の考察に有用（理論的にも解析面でも）

・**1960年代から80年代にかけ発展**
EP flux: 波の伝播
残差循環: 近似的に流体のラグランジュ運動と等しいことを期待

・**「伝統的」2次元表式**:　Edmon et al. (1980)
・**3次元への拡張**:　Hoskins et al. (1983), Trenberth(1986)
Plumb (1985, 1986), etc…

・**3次元TEM系の残差循環**:　定義に任意性が存在する

本発表の目的

・**任意性のない残差循環**の定義とそれを含むTEM方程式系を導出

・特に**位相依存性のない形式**の残差循環に注目(cf. Takaya and Nakamura 1997,2001)

・3次元の物質輸送の解析に有用であることが期待される

2次元TEM方程式系について（1）

wave-activity： pseudomomentum
→ conservative quantity in the zonally-symmetric basic flow

1. EP flux (in "traditional" form)

・Edmon et al (1980), Andews and McIntyre (1976) etc.

$$\frac{\partial [A]}{\partial t} + \nabla \bullet \mathbf{E} = D$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ -[u'v'] \\ f_0[v'\theta']/\Theta_z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{Cg}][A]$$

$$\nabla \bullet \mathbf{E} = [v'q']$$

$A = \dfrac{q'^2}{2(\partial Q/\partial y)}$ ：wave-activity pseudomomentum

q' ：PV perturbation

Q ：basic state of PV

$[P]$ ：zonal mean of a specific variable P

2次元TEM方程式系について（2）

1．EP flux (in “traditional” form)

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ -[u'v'] \\ f_0[v'\theta']/\theta_{0z} \end{pmatrix}$$

2-dimensional flux

Meteorologisches Institut
Universität Hamburg

http://www.mi.uni-hamburg.de/Diagnostics.269.0.html?&L=0

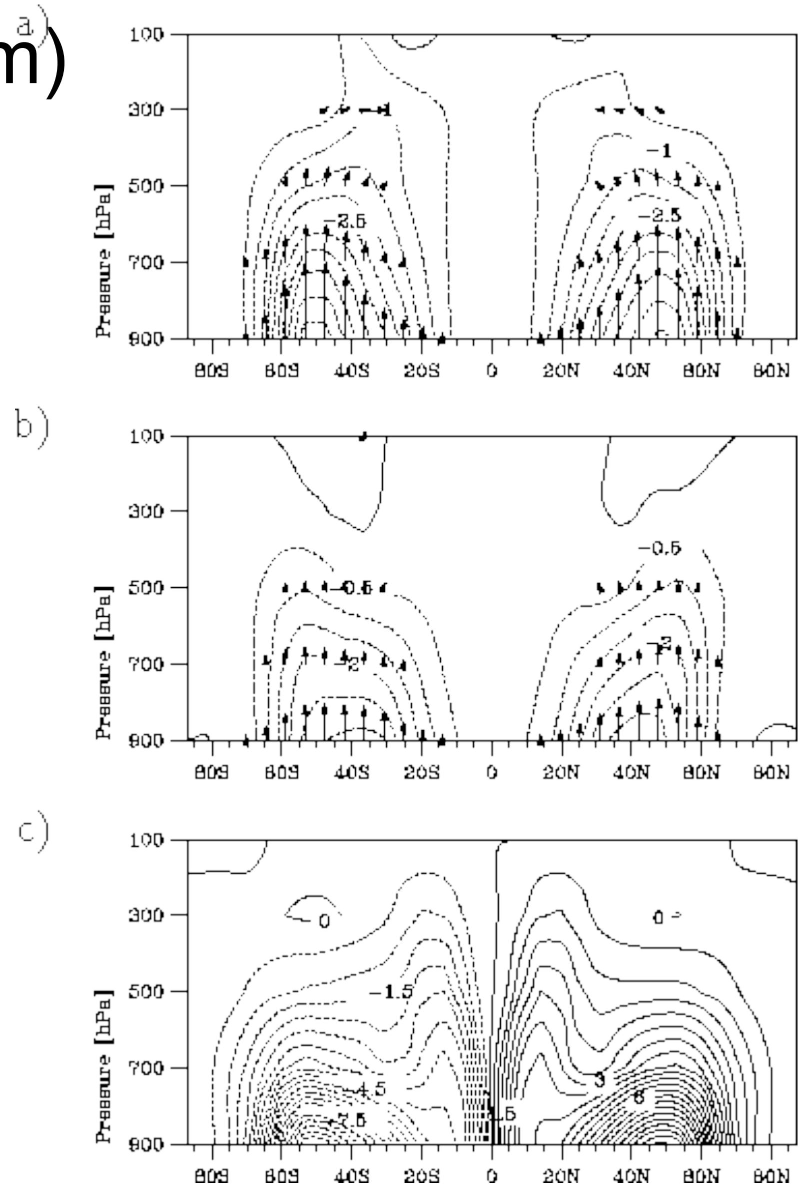


Figure C-8:
Eliassen-Palm flux (arrows) for transient (a) and standing (b) eddies (contours show divergence of the EP-flux in); c) the residual mean meridional mass
streamfunction (in) is obtained by a transformation utilizing the Eulerian mean circulation induced by the poleward temperature fluxes (transformed Eulerian mean circulation).

2次元TEM方程式系について(3)

Transformed Eulerian-Mean (TEM) equations

・Edmon et al. (1980)

$$\frac{DU}{Dt} - f\,v = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}u'^2 - \frac{\partial}{\partial y}u'v' \qquad (1)$$

⇒ 東西平均して

$$\frac{DU}{Dt} - f_0[v_a] = -\frac{\partial}{\partial y}[u'v'] \qquad (2)$$

両辺に $\frac{\partial}{\partial z}(f_0 v'\theta'/\Theta_z)$ を加える

$$\frac{DU}{Dt} - f_0([v_a] - ([v'\theta']/\Theta_z)_Z) = \ldots$$

2次元TEM系には「任意性」は見られない

$$\frac{DU}{Dt} - f_0[v]_a^* = \nabla \bullet \mathbf{E} \qquad \mathbf{E} = [\mathbf{Cg}][A] \qquad (4)$$

$$v_a^* = [v_a] - ([v'\theta']/\Theta_z)_Z$$:meridional component of residual circulation

Vertical component of the residual circulation w_a^* can also be defined.

v_a^* w_a^* Residual cirulation
⇒approximately equivalent to lagrangian motion

$$\frac{\partial [A]}{\partial t} + \nabla \bullet \mathbf{E} = D$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ -[u'v'] \\ f_0[v'\theta']/\Theta_z \end{pmatrix}$$

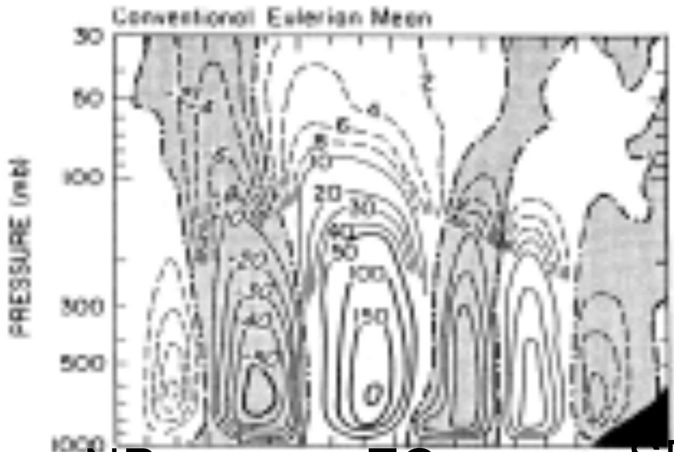
$$\nabla \bullet \mathbf{E} = [v'q']$$

$$\frac{DU}{Dt} - f_0[v]_a^* = \nabla \bullet \mathbf{E}$$

$$\frac{\partial [A]}{\partial t} + \nabla \bullet \mathbf{E} = D$$

(Time tendency of U) + (residual circulation)

= $\nabla \bullet$ (group velocity) x (wave-activity)



NP EQ SP

Eulerian mean: $[\mathbf{v}]$

NP EQ SP

TEM: $\mathbf{v}^*$

Iwasaki (1989)

3次元TEM方程式系の「任意性」について（1）

2. Plumb (1986); applicable to migratory eddies

(for simplicity, basic state is assumed to be zonally symmetric)

$$\boxed{\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U\overline{A}) + \nabla \bullet \mathbf{M_R} = D}$$

or $$\boxed{\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} + \nabla \bullet \mathbf{M_T} = D}$$

$$\nabla \bullet \mathbf{M_R} = \overline{v'q'}$$

$$\mathbf{U} = (U, 0, 0)^T$$

$\overline{P}$: time mean of a specific variable P

$$\mathbf{M_T} = \frac{\partial}{\partial x}(U\overline{A}) + \mathbf{M_R} \qquad \mathbf{M_R} = \begin{pmatrix} \overline{v'^2 - e} \\ -\overline{u'v'} \\ f_0 \overline{v'\theta'}/\Theta_z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M_T} = \mathbf{Cg}\overline{A}$$ ← 地面から見た群速度

$$\mathbf{M_R} = (\mathbf{Cg} - \mathbf{U})\overline{A}$$ ← 基本流に乗って見た群速度

$$\overline{v'q'} = \nabla \bullet (\mathbf{Cg} - \mathbf{U})\overline{A}$$

3次元TEM方程式系の「任意性」について（2）

・TEM equations in Plumb (1986)

$$\frac{DU}{Dt} - f\,v = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}u'^2 - \frac{\partial}{\partial y}u'v'$$

今回は東西平均ではなく**時間平均**

先ほどと同様に、両辺に然るべき量を加えてみる。例えば・・・

$$\frac{DU}{Dt} - f\bar{v}^* = \nabla \bullet \begin{pmatrix} \overline{v'^2 - e} \\ -\overline{u'v'} \\ f_0 \overline{v'\theta'} / \Theta_Z \end{pmatrix}$$

$$= \nabla \bullet \mathbf{M_R} = \nabla \bullet (\mathbf{Cg} - \mathbf{U})\bar{A}$$

$$\bar{v}^* = \bar{v} - \bar{\Phi}_x / f_0 - \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'^2 + v'^2 - e}) / f_0 - \frac{\partial}{\partial z}\overline{v'\theta'} / \Theta_Z \quad \cdots\text{(A)}$$

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U\bar{A}) + \nabla \bullet \mathbf{M_R} = D$$

$$\nabla \bullet \mathbf{M_R} = \overline{v'q'}$$

$$\overline{v'q'} = \nabla \bullet (\mathbf{Cg} - \mathbf{U})\bar{A}$$

・ところが両辺に加える量は<u>任意</u>。実際、(A)式の両辺にさらに $\frac{\partial}{\partial x}(U\bar{A})$ を加えてみると

$$\frac{DU}{Dt} - f\bar{v}^{**} = \nabla \bullet \begin{pmatrix} \overline{v'^2 - e + UA} \\ -\overline{u'v'} \\ f_0 \overline{v'\theta'} / \Theta_Z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(UA) + \nabla \bullet \mathbf{M_R} = \nabla \bullet \mathbf{Cg}A$$

$$\bar{v}^{**} = v - \bar{\Phi}_x / f - \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'^2 + v'^2 - e}) / f_0 - \frac{\partial}{\partial z}\overline{v'\theta'} / \Theta_Z - \frac{\partial}{\partial x}(UA / f_0)$$

$$= \bar{v}^* - \frac{\partial}{\partial x}(UA / f_0)$$

$$\begin{pmatrix} U\bar{A} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{v'^2 - e} \\ -\overline{u'v'} \\ f_0 \overline{v'\theta'} / \Theta_z \end{pmatrix} = \mathbf{Cg}(= \mathbf{U} + \mathbf{Cg}')$$

3次元TEM方程式系の「任意性」について（3）

⇒　3次元TEM方程式の右辺（波の群速度に比例する項）には任意性
⇒　それに伴って**残差循環の定義にも任意性**
⇒　3次元の残差循環の解析が困難

つまり、

$$\frac{DU}{Dt} - f\,v = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} u'^2 - \frac{\partial}{\partial y} u' v'$$

の両辺に何を足すかは「**自由**」なので、少なくとも2つ（実際には無限）の表式を得られる

$$\frac{DU}{Dt} - f\bar{v}^* = \overline{v'q'} = \nabla \bullet (\mathbf{Cg} - \mathbf{U})\bar{A}$$

＝∇・（**基本場から見た**波の群速度）x（波の活動度）

$$\frac{DU}{Dt} - f\bar{v}^{**} = \frac{\partial}{\partial x}(U\bar{A}) + \overline{v'q'} = \nabla \bullet \mathbf{Cg}\bar{A}$$

＝∇・（**地表から見た**波の群速度）x（波の活動度）

$$\nabla \bullet (\mathbf{Cg} - \mathbf{U})\bar{A} \Leftrightarrow \bar{v}^*$$

$$\nabla \bullet \mathbf{Cg}\bar{A} \Leftrightarrow \bar{v}^{**}$$

では、どうしたら良いのか！

そもそも残差循環は

（残差循環）＝（オイラー平均）＋（何か足した項）　←（何か足した項）に任意性

$$[\overline{v^*}] = [\overline{v}] - ([\overline{v'\theta'}] / \Theta_z)_Z)$$

一方、流体の運動は
（Lagrangian velocity) = (Eulerian velocity) + (Stokes Drift)

$$\mathbf{U}_\mathbf{L} = \mathbf{U}_\mathbf{E} + \mathbf{U}_\mathbf{S}$$

よって、（何か足した項）は（Stokes Drift)と近似的に等しいはず

それによって（何か足した項）の束縛条件とする
（Kinoshita et al. 2010, Kinoshita and Sato, 2012)

任意性のない残差循環とそれを含むTEM方程式の導出（1）

$$\text{displacement}:(\xi,\eta,\zeta)$$

$$\text{Stokes drift}:\overline{v_S}=(\overline{v'\xi'})_x+(\overline{v'\eta'})_y+\rho_0{}^{-1}(\rho_0\overline{v'\zeta'})_Z \quad \cdots(1)$$

$$\approx -(\overline{u'\eta'})_x+\rho_0{}^{-1}(\rho_0\overline{v'\zeta'})_Z \quad \cdots(2)$$

⇒ いろいろ計算すると

$$-(\overline{u'\eta'})_x+\rho_0{}^{-1}(\rho_0\overline{v'\zeta'})_Z\approx-\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'^2+v'^2})/f_0-\frac{\partial}{\partial z}\overline{v'\theta'}/\Theta_Z\equiv v_S \quad \cdots(3)$$

⇒ 一方、$\mathbf{U_L}=\mathbf{U_E}+\mathbf{U_S}$ を念頭に置くと: $\mathbf{U_L}\Leftrightarrow v^*, \mathbf{U_E}\Leftrightarrow \bar{v}$

$\bar{v}$ に（3）を加えたものが $\overline{v^*}$ となる。

任意性のない残差循環とそれを含むTEM方程式の導出(2)

<u>残差循環</u>は $\bar{v}^{***} = \bar{v} - \overline{\Phi}_x / f - \frac{\partial}{\partial x}\overline{(u'^2 + v'^2)} / f_0 - \frac{\partial}{\partial z}\overline{v'\theta'} / \Theta_Z$ と定義すれば良い

⇒ <u>近似的にラグランジュ運動と等しい</u>

このときの**TEM方程式系**は

$$\frac{DU}{Dt} - f\bar{v}^{***} = \nabla \bullet \begin{pmatrix} \overline{v'^2} \\ -\overline{u'v'} \\ f_0\overline{v'\theta'}/\Theta_Z \end{pmatrix}$$

⇒ 右辺は $= \nabla \bullet (\mathbf{Cg} - \mathbf{C})\bar{A} \neq \overline{v'q'}$

位相速度から見た群速度！

ちなみに、先ほどの例(残差循環がラグランジュ運動と等しくない場合)では…

<u>(1)右辺が基本流から見た群速度</u>

$$\frac{DU}{Dt} - f\bar{v}^* = \nabla \bullet \begin{pmatrix} \overline{v'^2 - e} \\ -\overline{u'v'} \\ f_0\overline{v'\theta'}/\Theta_Z \end{pmatrix} = \nabla \bullet (\mathbf{Cg} - \mathbf{U})\bar{A}$$

$$\bar{v}^* = \bar{v} - \overline{\Phi}_x / f_0 - \frac{\partial}{\partial x}\overline{(u'^2 + v'^2 - e)} / f_0 - \frac{\partial}{\partial z}\overline{v'\theta'} / \Theta_Z$$

<u>(2)右辺が地面から見た群速度</u>

$$\frac{DU}{Dt} - f\bar{v}^{**} = \nabla \bullet \begin{pmatrix} \overline{v'^2 - e + UA} \\ -\overline{u'v'} \\ f_0\overline{v'\theta'}/\Theta_Z \end{pmatrix} = \nabla \bullet \mathbf{Cg}A$$

$$\bar{v}^{**} = \bar{v}^* - \frac{\partial}{\partial x}(UA / f_0)$$

・位相依存性のないフラックス形式での残差循環（1）（cf. Takaya and Nakamura 2001)

・Takaya and Nakamura (1997; 2001)
Applicable to stationary eddies

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(cM)+\nabla\bullet\mathbf{W}=D$$

$$\nabla\bullet\mathbf{W}=(v'q'-\psi'q'_x)/2$$

$$=(\psi'_x q'-\psi'q'_x)/2$$

$$\mathbf{W}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} v'^2-\psi'\psi'_{xx} \\ -u'v'-\psi'\psi'_{yy} \\ f(v'\theta'-\psi'\psi'_{xz})/\Theta_z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}=(c,0,0)^T$$

c ：phase speed in zonal direction

$$\mathbf{W}=(\mathbf{Cg}-\mathbf{C})M$$ ←位相速度から見た群速度

$$(v'q'-\psi'q'_x)/2=\nabla\bullet(\mathbf{Cg}-\mathbf{C})M$$

・位相依存性のないフラックス形式での残差循環（2）（cf. Takaya and Nakamura 2001)

$$\mathrm{displacement}:(\xi,\eta,\zeta)$$

Stokes Drift

$$\overline{v_S}=(\overline{v'\xi'})_x+(\overline{v'\eta'})_y+\rho_0{}^{-1}(\rho_0\overline{v'\zeta'})_Z \qquad \cdots(1)$$

一方 $(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\bullet\nabla)\eta=v_L$ から、以下の式が成り立つと仮定

$$(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x})\eta=v-(\overline{u'\eta'})_x-(\overline{v'\eta'})_y-\rho_0{}^{-1}(\rho_0\overline{w'\eta'})_z$$

$$\Rightarrow \quad -(\overline{u'\eta'})_x-(\overline{v'\eta'})_y-\rho_0{}^{-1}(\rho_0\overline{w'\eta'})_z=\overline{v_S} \qquad \cdots(2)$$

よって、（1）と（2）を時間平均をとらない形で足し合わせると

$$v_S=\frac{1}{2}[(v'\xi'-u'\eta')_x+\rho_0{}^{-1}(\rho_0v'\zeta'-w'\eta')_z]$$

⇒　Takaya and Nakamura (2001)と一致する

・位相依存性のないフラックス形式での残差循環（３） （cf. Takaya and Nakamura 2001)

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(cM)+\nabla\bullet\mathbf{W}=D$$

$$\nabla\bullet\mathbf{W}=(\psi'_x q'-\psi' q'_x)/2=\nabla\bullet(\mathbf{Cg}-\mathbf{C})M$$

$$\frac{DU}{Dt}-f\,V^{***}=\nabla\bullet\mathbf{W}=\nabla\bullet(\mathbf{Cg}-\mathbf{C})M$$

$$V^{***}=V-\Phi_x/f_0$$
$$-\frac{1}{2}[\frac{\partial}{\partial x}[(u'^2-\psi'\psi'_{yy})+(v'^2-\psi'\psi'_{xx})]/f_0]+\frac{\partial}{\partial z}(v'\theta'-\psi'\psi'_{xz})/\Theta_z]$$

$$U^{***}=U-\Phi_y/f_0$$
$$+\frac{1}{2}[\frac{\partial}{\partial y}[(u'^2-\psi'\psi'_{yy})+(v'^2-\psi'\psi'_{xx})/f_0-\frac{\partial}{\partial z}(u'\theta'+\psi'\psi'_{yz})/\Theta_z]$$

$$W^{***}=W+\frac{1}{2}[\frac{\partial}{\partial x}(u'\theta'+\psi'\psi'_{yz})/\Theta_z+\frac{\partial}{\partial y}(v'\theta'-\psi'\psi'_{xz})/\Theta_z]$$

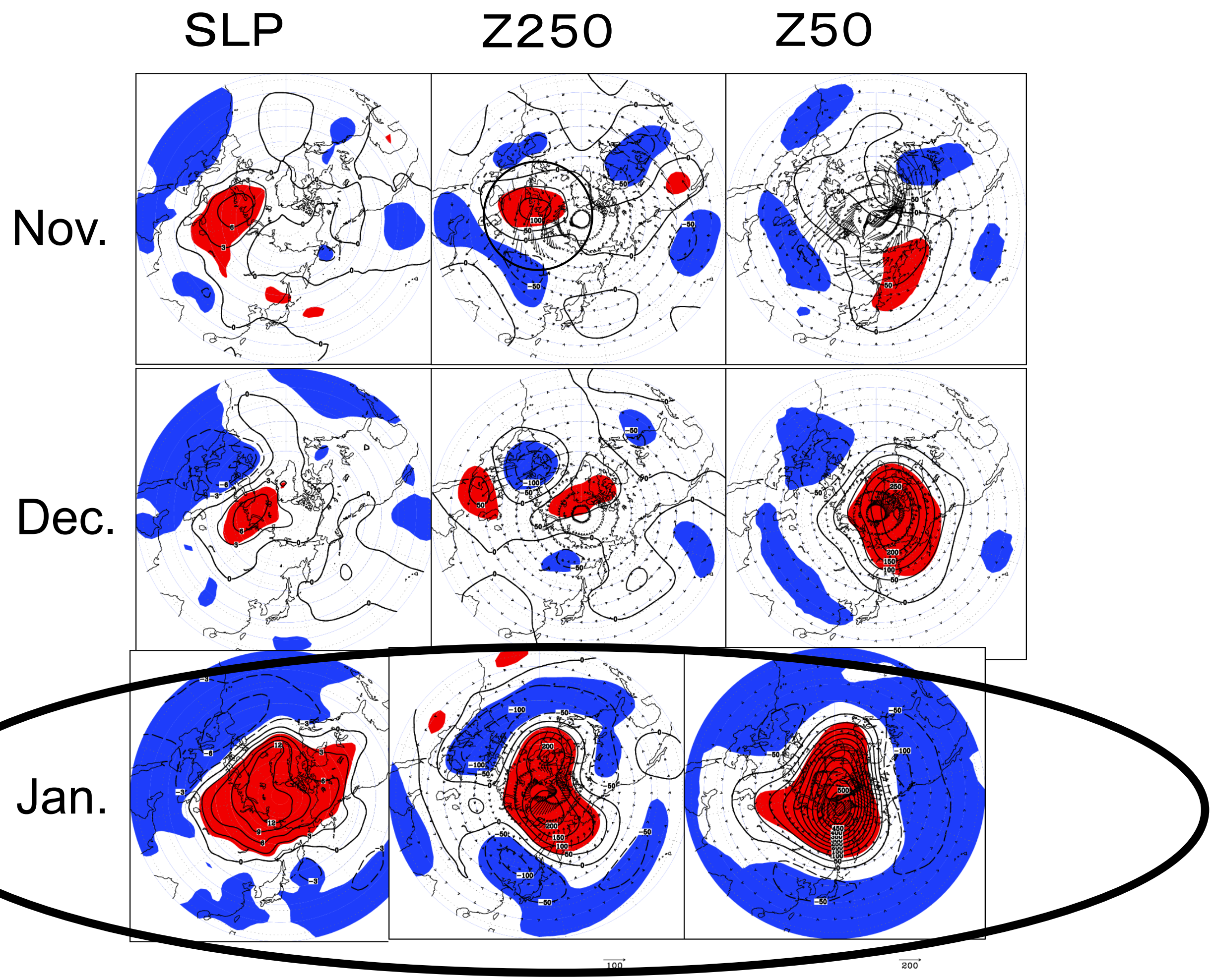
example

Time evolution (from Nov. to Jan.) of AO-like anomalies in January

Precursory signal over the western Eurasia
→Modification of vertical propagation of planetary waves

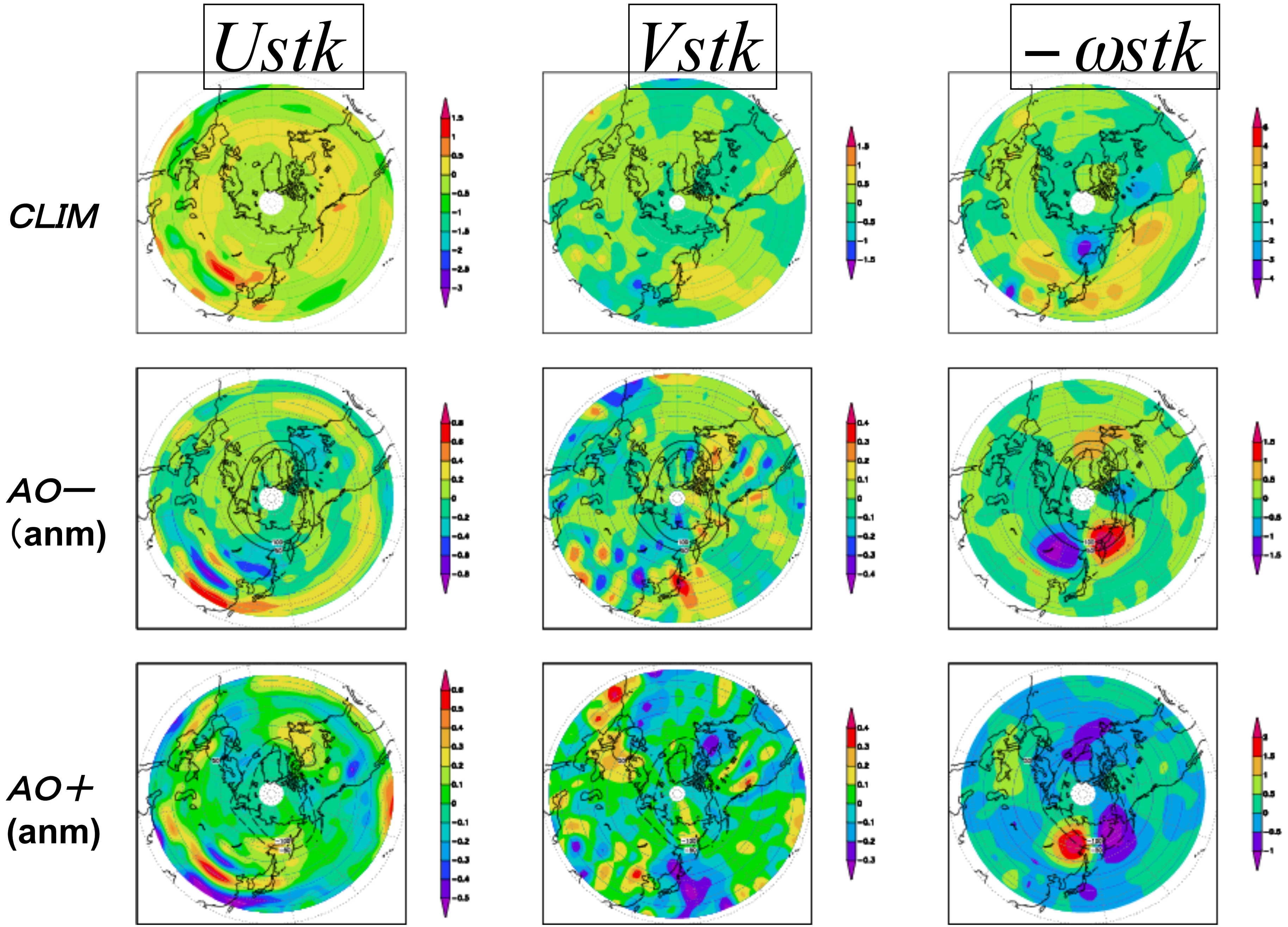
AO signal in stratosphere

Deep structure of AO



Takaya and Nakamura 2008

3-dim. of Stokes drift for climatology, AO-, A+ (unit: m/s for U, V; 1e-3Pa/s for ω)



まとめ

・今まであまり省みられていなかったが、3次元の残差循環の定義にはそのままでは任意性がある。

・ストークスドリフトと同等の量をEulerian velocity に足すことにより、その任意性を解消することが出来る。

・位相依存性のない形式でも同様の操作が可能で、それにより停滞性擾乱に伴う残差循環変動を解析する事が可能となる。成層圏・対流圏結合などに有効かも。

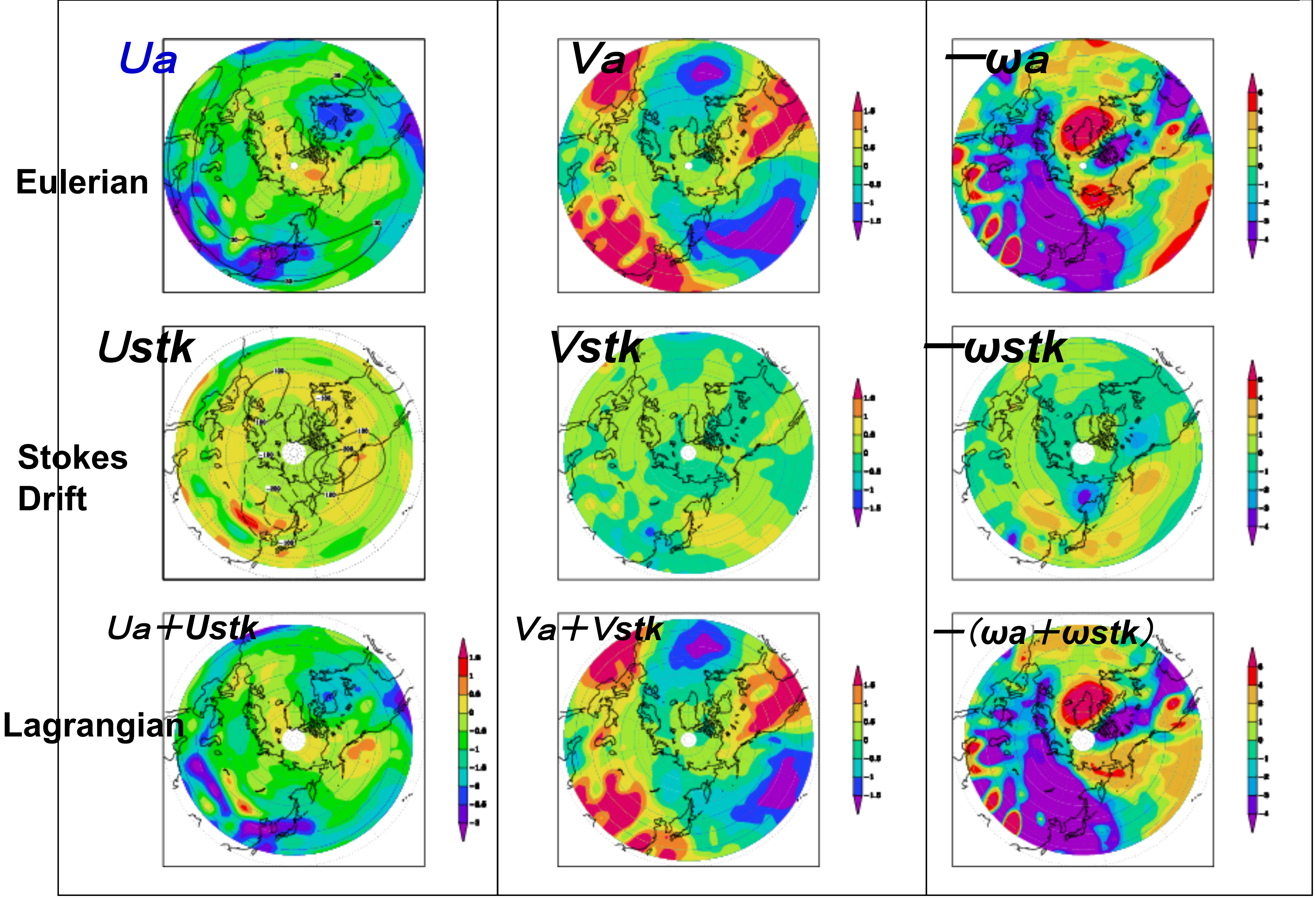
・任意性のない残差循環を含むTEM方程式系に現れる擾乱のフラックスは、「位相速度に乗った時の群速度」となる。

$$\frac{DU}{Dt} - f\,V^{***} = \nabla \bullet \mathbf{W} = \nabla \bullet (\mathbf{Cg} - \mathbf{C})M$$

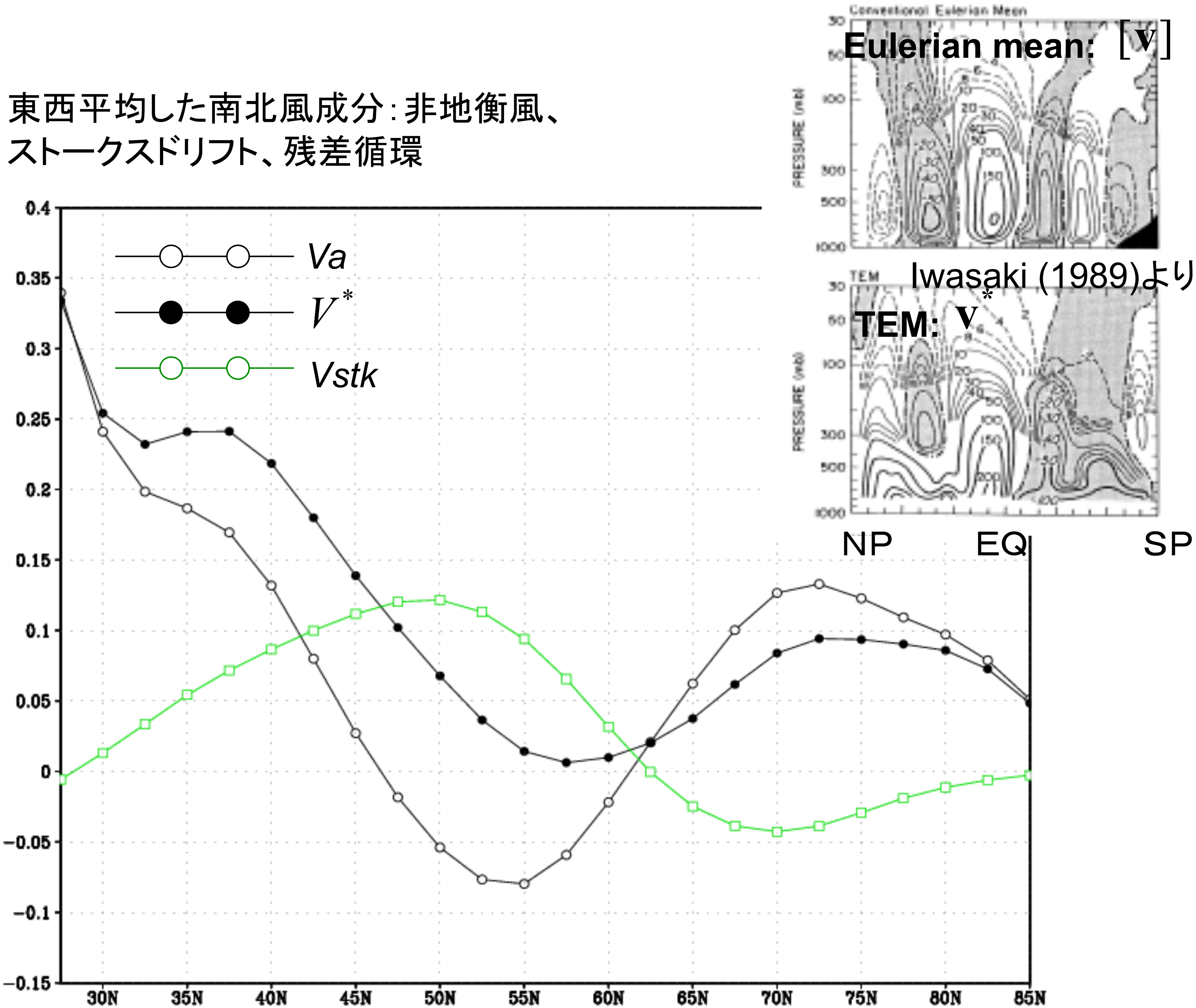
課題

・何故TEM系のフラックスが「位相速度に乗った時の群速度」なのか
・「質量重付温位座標系」への拡張
　:Lagrangian motion を解析する為にはもっとも正確な表式
　:境界条件（地表）の厳密な取り扱い（TEMとは違う）

100hPaにおける3次元の非地衡風成分、ストークスドリフト成分（惑星波によるもの）、及び残差循環成分の気候値（1月）　　　（unit: m/s for U,V, 1e-3Pa/s for ω）

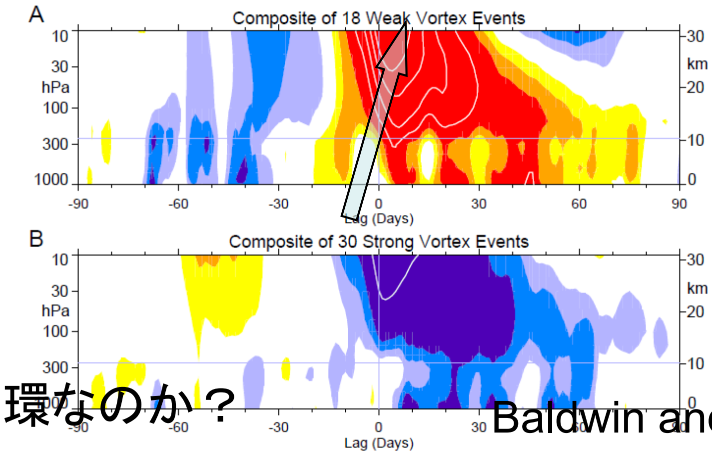


東西平均した南北風成分：非地衡風、
ストークスドリフト、残差循環



ー　対流圏成層圏結合

- ・ロスビー波
- ・子午面循環



Baldwin and Dunkerton, 1999

何故いまさらTEM方程式系の残差循環なのか？
TS coupling との関係は？

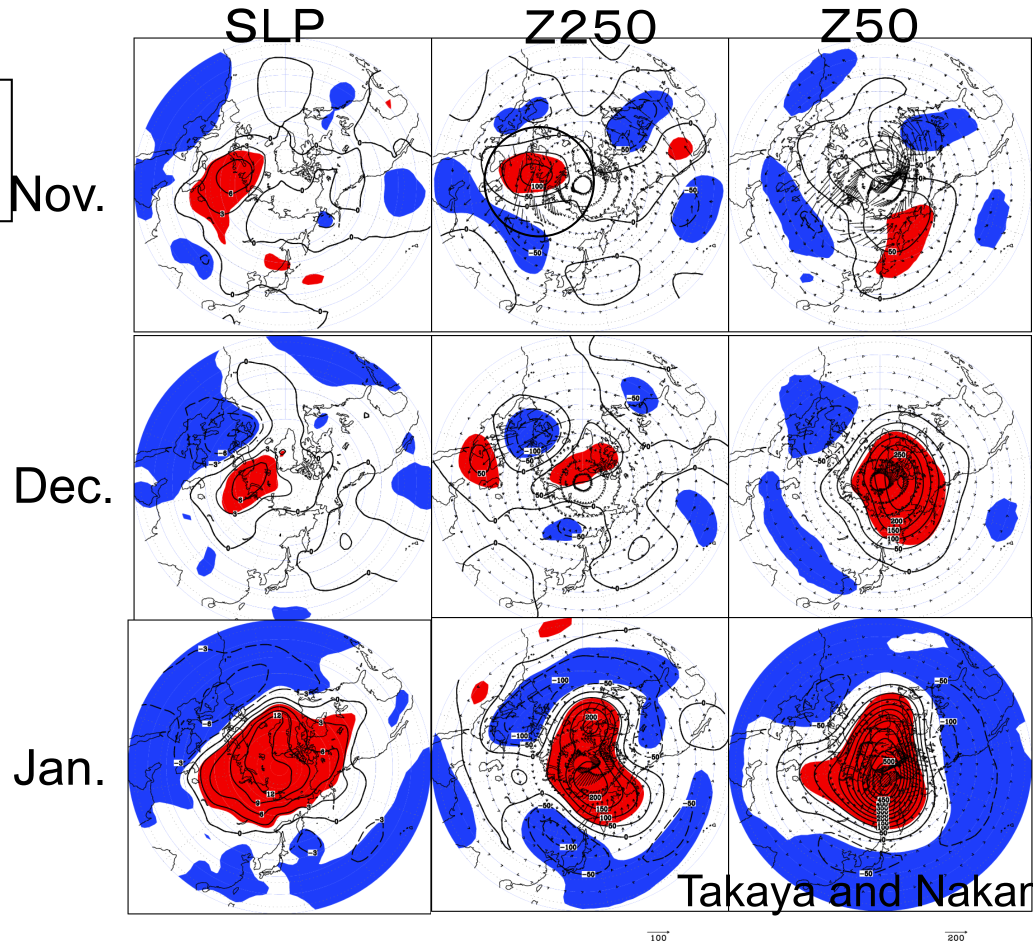
西部ユーラシアの擾乱に因る惑星波上方伝播の変調

↓

成層圏にAO的シグナル

↓

対流圏から成層圏にかけAO的シグナル



Takaya and Nakamura 2008