

## 神戸大集中講義 2012 Part 3

担当 高数縁 (東大大気海洋研究所)

## 「熱帯の気候形成：対流」

## 熱帯大気の総観規模波動

- 偏東風波動擾乱
- 熱帯大気のスケール解析
- 偏東風波動擾乱のエネルギー解析

## 熱帯大気擾乱の特徴

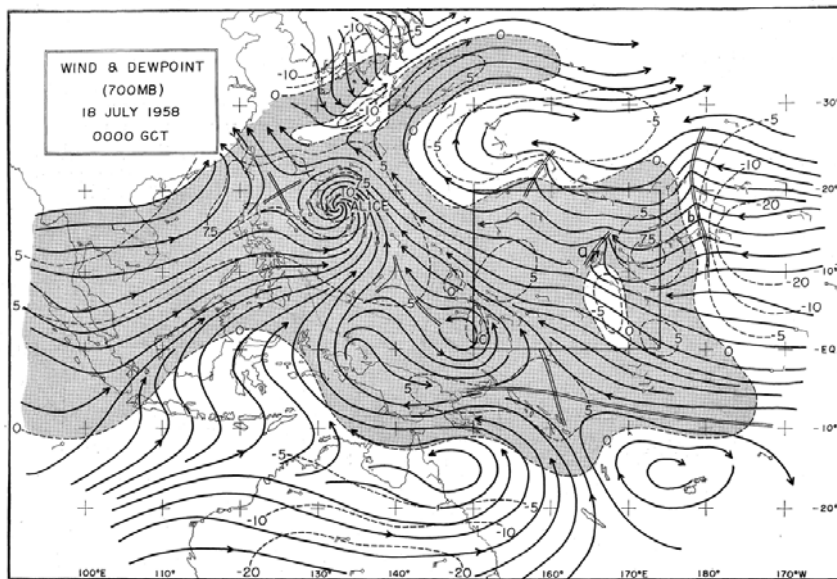
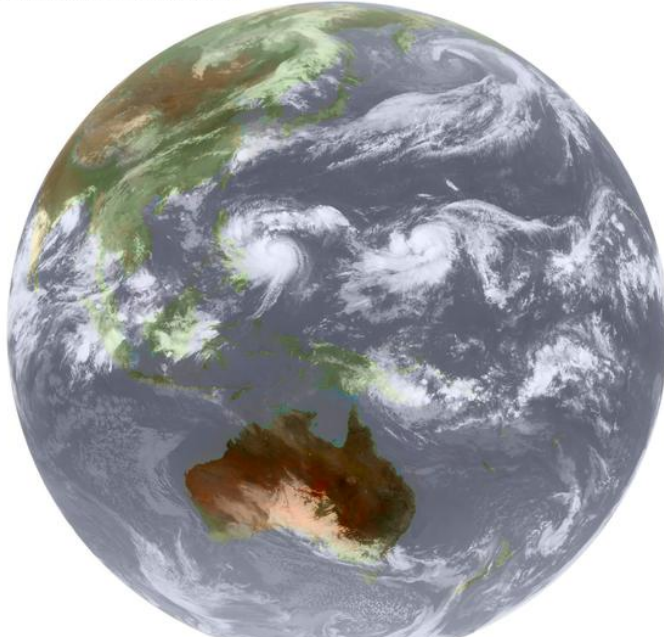


Fig. 2 Streamlines at 700 mb-level, 00 GCT 18 July 1958. Dotted lines show iso-lines of dew-point temperature (°C).  
The rectangular region shown by solid line is the area for detailed analysis.

(Yanai 1961, JMSJ)

## 熱帯波動擾乱

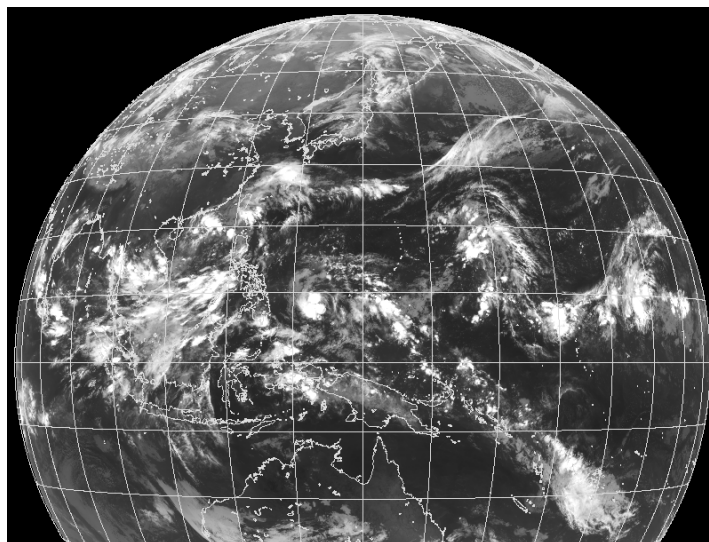
MTSAT-1R IR1 09100112JST Kochi Univ



GMS赤外画像

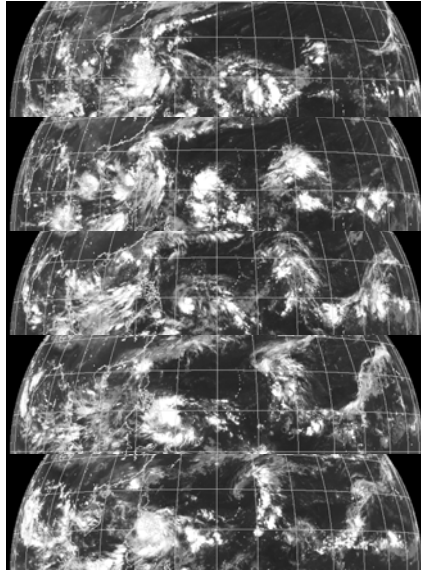
熱帯域の雲システムは大規模な大気擾乱に伴って現れることが多い。

## 熱帯波動擾乱

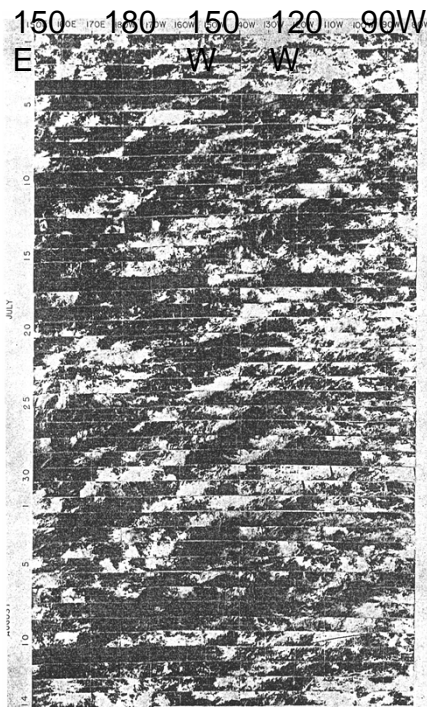


2011 10 10 02JST

# 熱帯波動擾乱

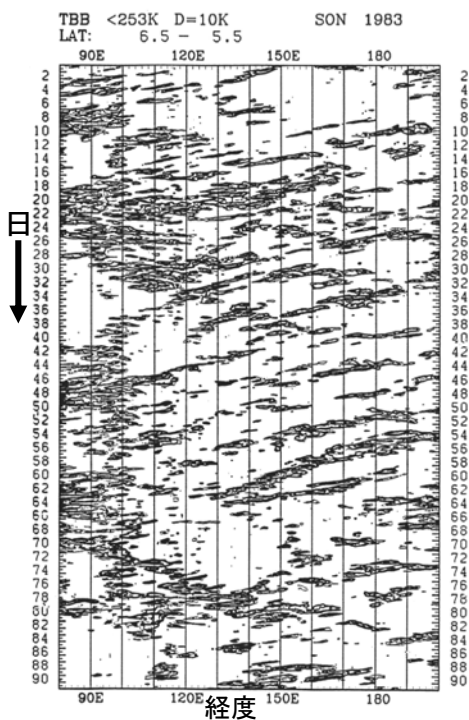


10/8-12/2011



5-10N, 150E-80Wの衛星画像を並べた図。4-5日周期の雲システムの西進が顕著である。

(Chang 1970)



気象衛星「ひまわり」による  
赤外黒体輻射輝度の経度  
-時間断面図。

1983年9月-11月

北緯5.5-6.5度平均

### 「偏東風波動擾乱」

熱帯収束帯域を西進する数日(3-10日)周期の対流圏擾乱で積雲対流活動を伴う。台風やハリケーンなどの熱帯低気圧の発生源ともなる。

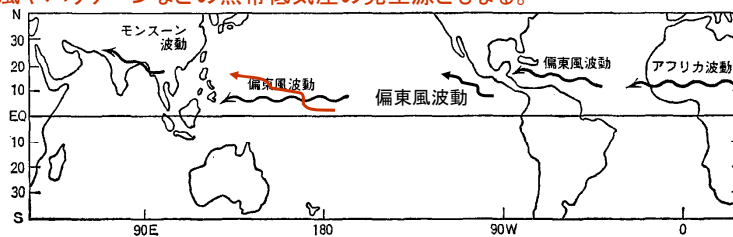
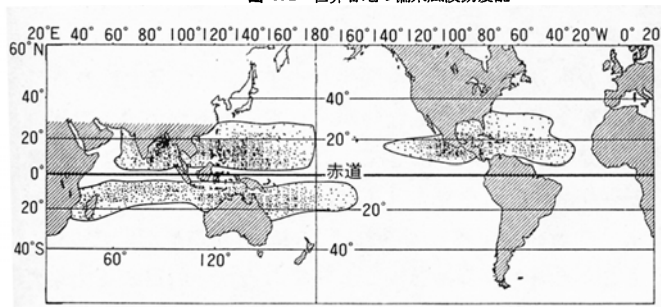


図 5.1 世界各地の偏東風波動擾乱

新田(1982)より引用・加筆



1952-71の20年間  
の熱帯低気圧発  
生位置

Gray,1979

## 西太平洋の偏東風波動擾乱: 850hPa 渦度

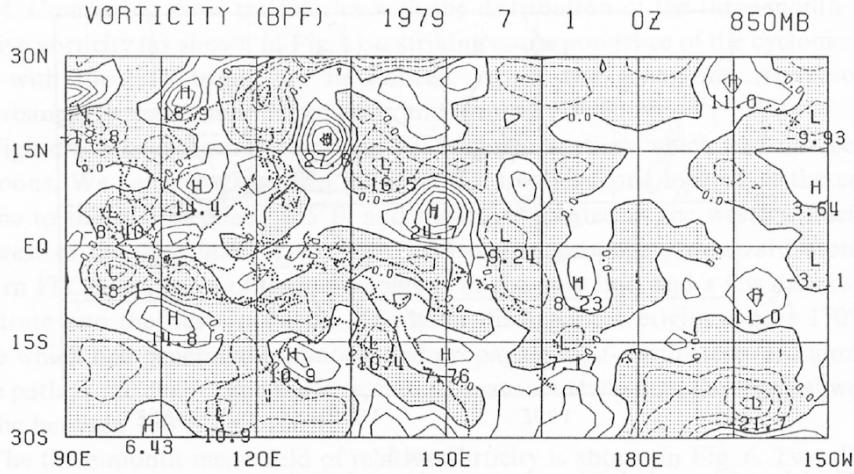


Figure 3

Distribution of the band-pass filtered relative vorticity with the contour interval of  $5 \times 10^{-6} \text{s}^{-1}$  at 00Z 1 July 1979. Negative values are shaded.

## 西太平洋偏東風波動: 擾乱の構造

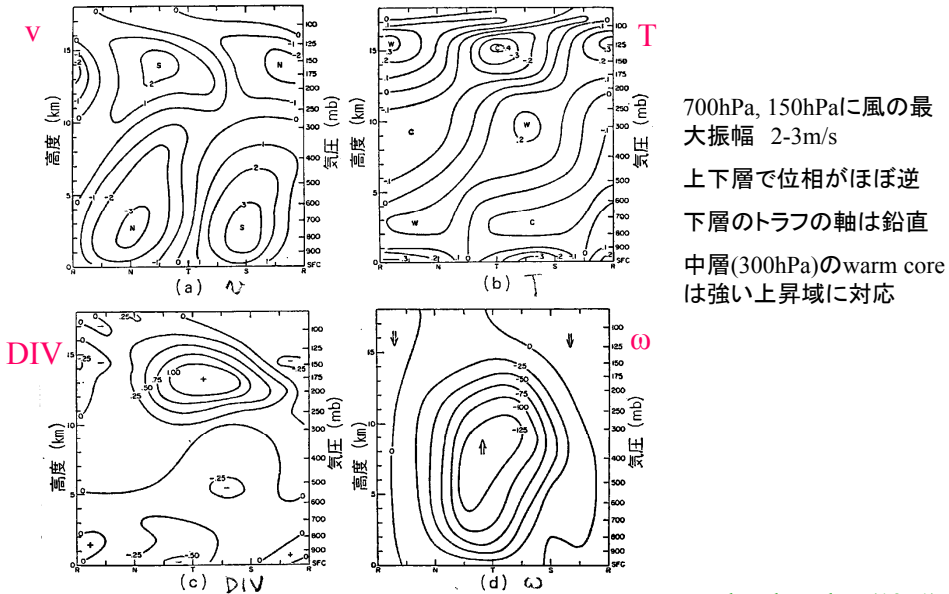


図 5.4 合成した偏東風波動の (a) 南北風 ( $\text{ms}^{-1}$ ), (b) 温度 ( $^{\circ}\text{C}$ ), (c) 水平発散 ( $10^{-3} \text{s}^{-1}$ ), (d) 鉛直 p-速度 ( $10^{-3} \text{mb s}^{-1}$ ) の分布. 横軸は R: リッジ, N: 北風の最大, T: トラフ, S: 南風の最大, をそれぞれ表わす (リードとレッカー, 1971).

700hPa, 150hPaに風の最大振幅 2-3m/s  
 上下層で位相がほぼ逆  
 下層のトラフの軸は鉛直  
 中層(300hPa)のwarm coreは強い上昇域に対応

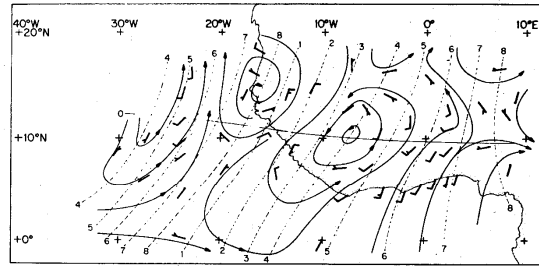
Reed and Recker (1971)

# アフリカ波動

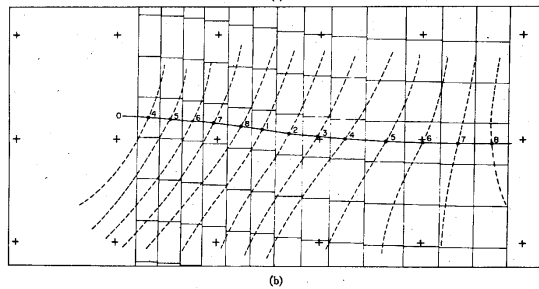
318

MONTHLY WEATHER REVIEW

VOLUME 105



$$\overline{u'v'} > 0$$

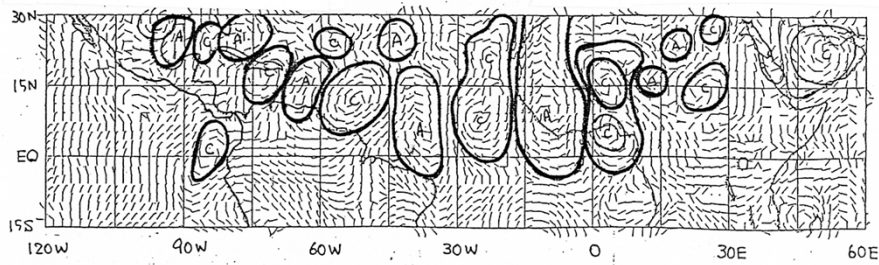


Reed et al. 1977

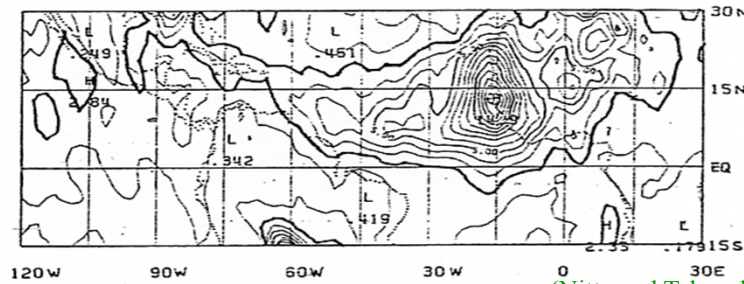
FIG. 1a. Streamline analysis with superimposed phase lines (dashed) and disturbance path (thin solid line) for 1200 GMT 7 September 1974. Band-pass filtered winds are plotted at station locations. Plotting convention: one full barb corresponds to 5 m s<sup>-1</sup>, one-half barb to 2.5 m s<sup>-1</sup> and no barb to 1 m s<sup>-1</sup>.  
FIG. 1b. Boxes used in compositing.

## アフリカ波動と西大西洋偏東風波動

1979年9月1日の南北風偏差分布



850hPa南北風の3-4日周期変動のスペクトルパワー分布



(Nitta and Takayabu 1985)

# アフリカ波動: 擾乱の構造

Reed et al. 1977 R. J. REED, D. C. NORQUIST AND E. E. RECKER

327

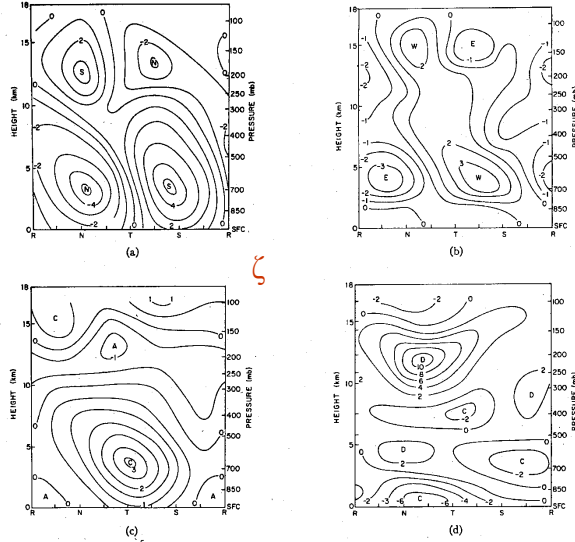


FIG. 8. Vertical cross sections along reference latitude. (a) Meridional wind deviation ( $m s^{-1}$ ); (b) zonal wind deviation ( $m s^{-1}$ ); (c) vorticity ( $10^{-4} s^{-2}$ ); (d) divergence ( $10^{-4} s^{-1}$ ). R, N, T, S refer to ridge, north wind, trough, south wind sectors of the wave, respectively.

Reed et al. 1977

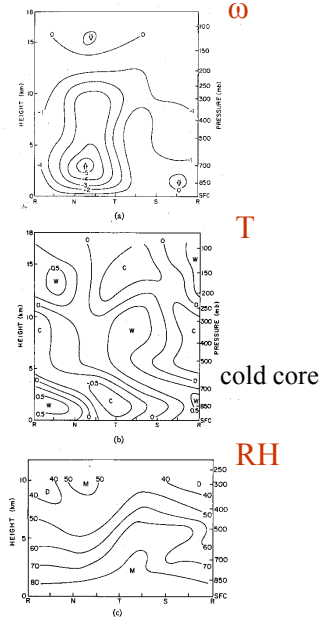


FIG. 9. As in Fig. 8 except for (a) vertical motion ( $mb h^{-1}$ ), (b) temperature deviation ( $^{\circ}C$ ) and (c) relative humidity (%over 100).

**Conditions Expected Through October**

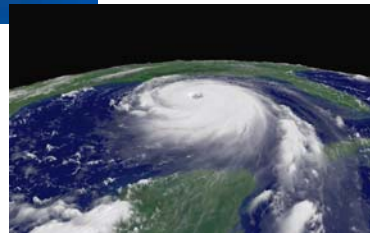
Hurricanes form here:  
- Warmer Waters  
- Lower Wind Shear

2-3 Landfalling Hurricanes

1-2 Landfalling Hurricanes

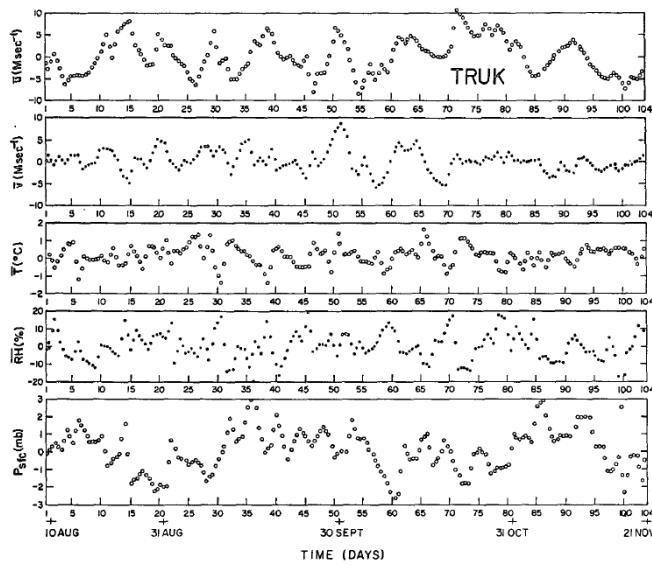
Favorable Winds from Africa

based on typical August-October conditions during above-normal hurricane seasons



## 熱帯大気のスケーラ解析

### 熱帯大気擾乱の特徴：時間変動幅



sfc-550hPaで平均した値の時系列。

(Wallace and Chang, 1969 JAS)



## 熱帯大気のスケーリング解析

Scale Height :

静水圧、等温大気  $T = \text{const.}$  を仮定

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{p}{RT} g$$

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\int_0^z \frac{g}{RT} dz$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{g}{RT} z$$

$$p = p_0 e^{-z/\frac{g}{RT}} = p_0 e^{-z/H}, \quad \text{where } H \equiv \frac{g}{RT} : \text{scale height}$$

## 熱帯大気のスケーリング解析

$$\text{運動方程式} \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + f \vec{k} \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots\dots(1)$$

[U/L] [WU/D] [fU] [δp/ρL]

$$0 = \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \quad \dots\dots(2)$$

$$\text{質量保存} \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad \dots\dots(3)$$

$$\text{熱力の式} \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \ln \theta + w \frac{\partial \ln \theta}{\partial z} = \frac{Q}{C_p T} \quad \dots\dots(4)$$

$$\left[ \frac{U^2}{L} \frac{\delta \theta}{\theta} \right] \quad \left[ \frac{\kappa W}{H} \right] \quad \left[ \frac{Q}{C_p T} \right]$$

$L \sim 10^6 m$ ,  $U \sim 10 ms^{-1}$ ,  $D \sim H \sim 10^4 m$ ,  $f \sim 10^{-4}$  (中緯度),  $\sim 10^{-5}$  (熱帯)  $s^{-1}$

大気の安定度  $\kappa \equiv H \frac{\partial \ln \theta}{\partial z} \sim 10^{-1}$

Rossby数  $R_0 \equiv \frac{U}{fL} \sim 10^{-1}$  (中緯度),  $\sim 1$  (熱帯)

## 熱帯大気のスケーリング解析

Wの大きさを見積もる

非断熱加熱なしの場合  $Q=0$

$$\text{熱力の式} \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \ln \theta + w \frac{\partial \ln \theta}{\partial z} = 0 \quad \dots (4)$$

$$\left[ \frac{U}{L} \frac{\delta \theta}{\theta} \right] \quad \left[ \frac{\kappa W}{H} \right]$$

(4) の第1,2項が釣り合う。

$$[W] \sim \frac{U H}{L \kappa} \frac{\delta \theta}{\theta} \sim \frac{U H}{L \kappa} \frac{fUL}{Hg} = \frac{fU^2}{\kappa g}$$

$$\sim 10^{-4} \cdot 10^2 \cdot 10^1 \cdot 10^{-1} \sim 10^{-2} = 1 \text{ cm/s} \quad (\text{中緯度})$$

$$\sim 10^{-5} \cdot 10^2 \cdot 10^1 \cdot 10^{-1} \sim 10^{-3} = 0.1 \text{ cm/s} \quad (\text{熱帯})$$

$$\left[ \begin{array}{l} \therefore (2)\text{式より } \frac{\delta p}{D} \sim g \delta \rho \rightarrow \frac{\delta p}{p} \sim \frac{gD}{p} \delta \rho = \frac{gD}{RT\rho} \delta \rho = \frac{D}{H} \frac{\delta \rho}{\rho} \sim \frac{\delta \rho}{\rho} \sim \frac{\delta \theta}{\theta} \\ \text{地衡風バランスより} \\ fU \sim \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{L} \rightarrow \delta p \sim \rho fUL \rightarrow \frac{\delta p}{p} \sim \frac{fUL}{RT} = \frac{fUL}{Hg} \\ \therefore \frac{\delta \theta}{\theta} \sim \frac{\delta p}{p} \sim \frac{fUL}{Hg} \end{array} \right]$$

## 熱帯大気のスケーリング解析

熱帯では、活発な積雲対流活動による非断熱加熱が大きい

非断熱加熱を考慮  $Q \neq 0$  の時

$$\text{熱力の式} \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \ln \theta + w \frac{\partial \ln \theta}{\partial z} = \frac{Q}{C_p T} \quad \dots (4)$$

$$\left[ \frac{U}{L} \frac{\delta \theta}{\theta} \right] \quad \left[ \frac{\kappa W}{H} \right] \quad \left[ \frac{Q}{C_p T} \right]$$

(4) の第2,3項が釣り合う。

$$[W] \sim \frac{H}{\kappa} \frac{Q}{C_p T} \quad \frac{Q}{C_p} \text{ は ITCZ 域の平均的な潜熱加熱 } \sim 5 \text{ 度/日 とすると}$$

$$\sim 10^{-2} = 1 \text{ cm/s} \quad (\text{熱帯})$$

このWの大きさは中緯度擾乱とほぼ同じ程度になる。

熱帯大気中の大規模擾乱

1. 気圧や気温の変動が小さい
2. 非断熱加熱が弱い状況では鉛直流が弱く上層と下層が *decouple*
3. 積雲などの加熱効果が大きい場合には、鉛直流は中緯度擾乱とほぼ同程度の大きさを持ち、対流圏全体でまとまった構造をもつ

## 熱帯擾乱のエネルギー解析

①  $\bar{K}$  zonal mean kinetic energy

$$\frac{d}{dt} \left\langle \rho_0 \frac{\bar{u}^2}{2} \right\rangle = \underbrace{\left\langle \rho_0 \bar{w} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right\rangle}_{\bar{P} \rightarrow \bar{K}} + \underbrace{\left\langle \rho_0 \bar{u}' v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right\rangle}_{K' \rightarrow \bar{K}} + \underbrace{\left\langle \rho_0 \bar{u} \bar{X} \right\rangle}_{\text{dissipation}}$$

②  $\bar{P}$  zonal mean potential energy

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{\rho_0}{2N^2} \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right)^2 \right\rangle = - \underbrace{\left\langle \rho_0 \bar{w} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right\rangle}_{\bar{P} \leftarrow \bar{K}} + \underbrace{\left\langle \frac{\rho_0 \kappa \bar{Q}}{N^2 H} \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right) \right\rangle}_{\text{generation of } \bar{P} \text{ by diabatic processes}} + \underbrace{\left\langle \frac{\rho_0}{N^2} \bar{v}' \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial z} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y \partial z} \right\rangle}_{P' \rightarrow \bar{P}}$$

③  $K'$  eddy kinetic energy

$$\frac{d}{dt} \left\langle \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{u'^2 + v'^2}{2} \right\rangle = \underbrace{\left\langle \rho_0 \bar{w}' \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial z} \right\rangle}_{P' \rightarrow K'} - \underbrace{\left\langle \rho_0 \bar{u}' v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right\rangle}_{K' \rightarrow \bar{K}} + \underbrace{\left\langle \rho_0 (u' X' + v' Y') \right\rangle}_{\text{dissipation}}$$

④  $P'$  eddy potential energy

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{\rho_0}{2N^2} \left( \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right)^2 \right\rangle = - \underbrace{\left\langle \rho_0 \bar{w}' \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial z} \right\rangle}_{P' \leftarrow K'} + \underbrace{\left\langle \frac{\rho_0 \kappa}{N^2 H} \bar{Q}' \left( \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial z} \right) \right\rangle}_{\text{generation of } P' \text{ by diabatic processes}} - \underbrace{\left\langle \frac{\rho_0}{N^2} \bar{v}' \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial z} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y \partial z} \right\rangle}_{P' \leftarrow \bar{P}}$$

Apparent Heat Source & Apparent Moisture Sink (Yanai et al. 1973)

大規模場の量で表わされる加熱率、乾燥化率

これは、放射加熱、凝結加熱(蒸発冷却)、小規模運動による輸送の結果である。

$$Q_1 = \frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{s} + \bar{\omega} \frac{\partial \bar{s}}{\partial p} = Q_R + L(\bar{c} - \bar{e}) - \nabla \cdot \overline{s'v'} - \frac{\partial \overline{s'\omega'}}{\partial p}$$

$$Q_2 = -L \left( \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{q} + \bar{\omega} \frac{\partial \bar{q}}{\partial p} \right) = L(\bar{c} - \bar{e}) + L \nabla \cdot \overline{q'v'} + L \frac{\partial \overline{q'\omega'}}{\partial p}$$

where,

$s = C_p T + gz$ : dry static energy,  $q$  is the water vapor mixing ratio

$$Q_1 - Q_2 - Q_R = -\frac{\partial \overline{h'\omega'}}{\partial p} \quad h = C_p T + gz + Lq : \text{moist static energy}$$

### 西太平洋マーシャル諸島の高層観測網 (1000kmスケール)

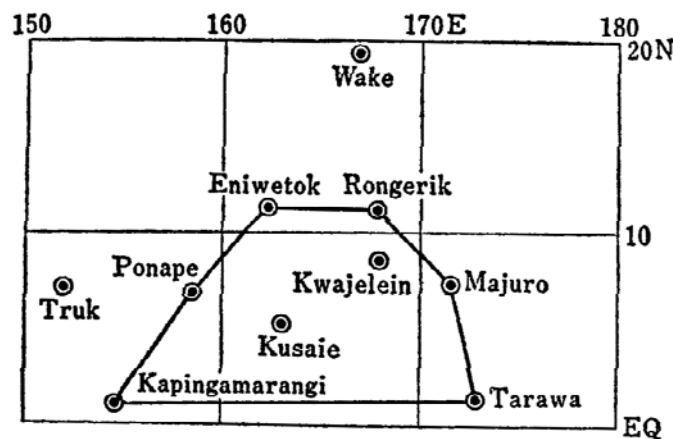
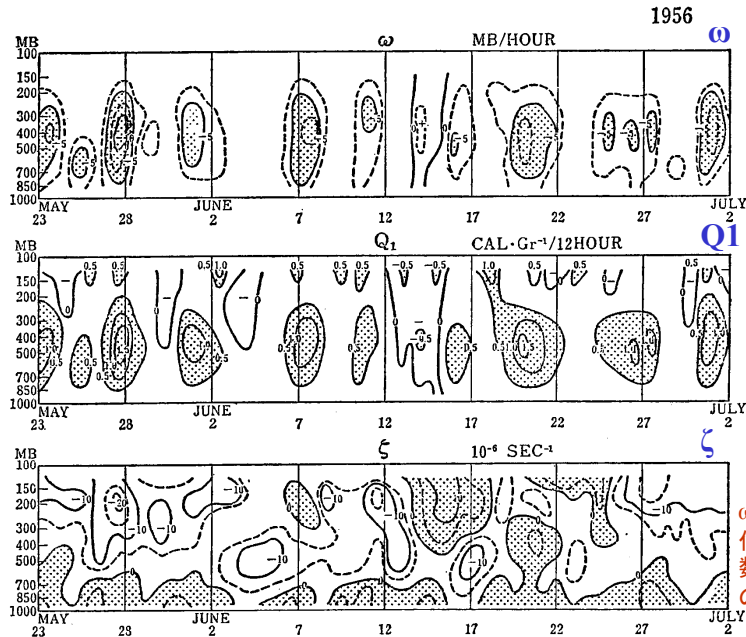


図 6.1 エネルギー収支解析に用いられたマーシャル諸島の高層観測網。実線で囲まれた領域で収支計算が行われた(新田, 1970)。



ω、Q1共に400hPa  
付近に最大振幅、  
数日周期、大きなω  
のとき大きなQ1

図 6.2 マーシャル諸島の解析領域で計算された鉛直 p-速度, 非断熱加熱率, 相対湿度の時間-垂直断面 (新田, 1972).

Cospectra between α& ω, and α& Q1

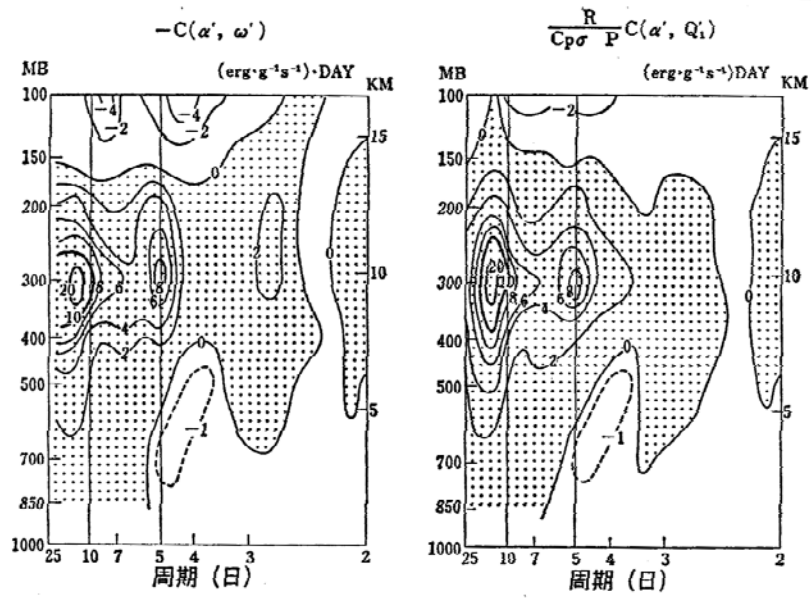


図 6.3 エネルギーの変換量を表わす α と ω, α と Q のコ・スペクトルの垂直分布 (新田, 1972). (Nitta 1972)

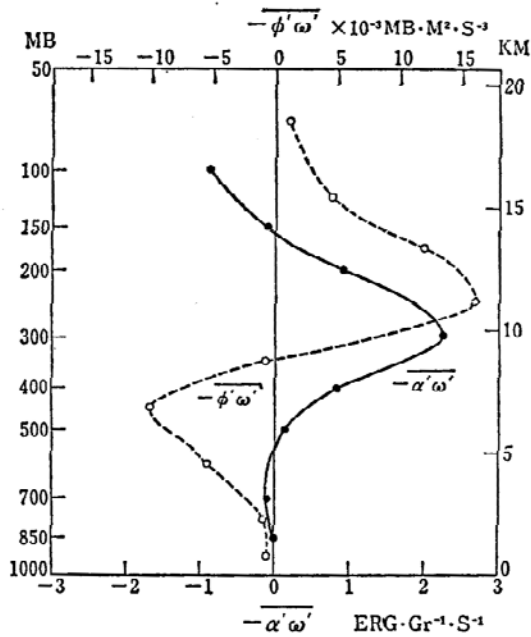


図 6.4 周期1日から20日までの変動によるエネルギー変換量 ( $-\alpha'\omega'$ ) と垂直エネルギー・フラックス ( $-\phi'\omega'$ ) の垂直分布 (新田, 1972).

Energy budget for 1-20-day period wave disturbances over the tropical western Pacific in 1956

表 6.1 1956 年の熱帯西部太平洋における周期 1~20 日の波動擾乱のエネルギー収支 ( $10^{-1} \text{erg g}^{-1} \text{s}^{-1}$ ) (新田, 1972).

MB	$-U_y \overline{u'v'}$	$-U_p \overline{u'\omega'}$	$-\frac{\partial}{\partial p}(\phi'\omega')$	$-\alpha'\omega'$	$\frac{R}{c_p \sigma p} \overline{\alpha'Q'}$	$-\frac{\overline{\alpha_y v'} \alpha'}{\sigma}$
50	-0.4					-0.2
100	0.0	-0.5	6.6	-8.8	-5.3	-0.2
150	0.1	0.1	15.0	-1.1	-0.8	-0.0
200	-0.1	0.3	5.2	8.9	6.5	-0.2
300	-1.0	-0.3	-16.2	22.3	23.3	-0.1
400	-0.4	-0.1	-9.3	8.4	8.7	0.0
500	-0.2	0.5	3.1	1.3	1.9	0.0
700	0.0	0.3	2.5	-0.9	-0.7	-0.0
850	0.0	-0.2	0.2	0.0	-0.0	0.0
1000	0.1					-0.0

Energy budget for 1-20-day period wave disturbances over the tropical western Pacific in 1956

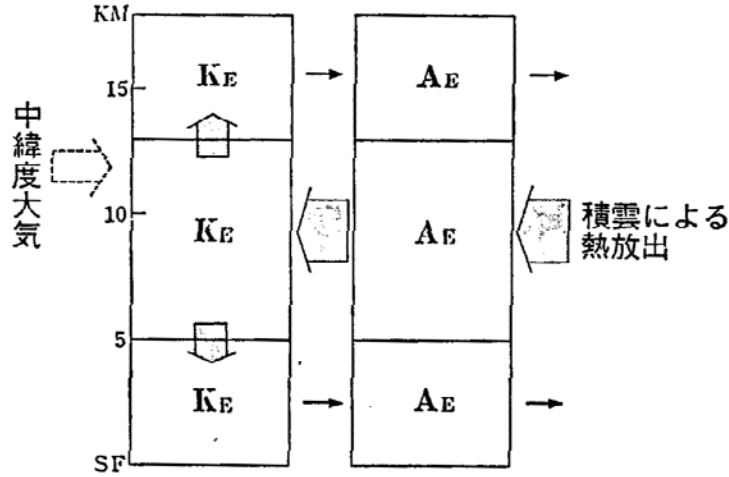


図 6.5 熱帯西部太平洋における波動擾乱のエネルギー収支の模式図. 点線の矢印はある種の波動について得られている結果を表わす (123~127 ページ参照).

アフリカ波動: 場の構造

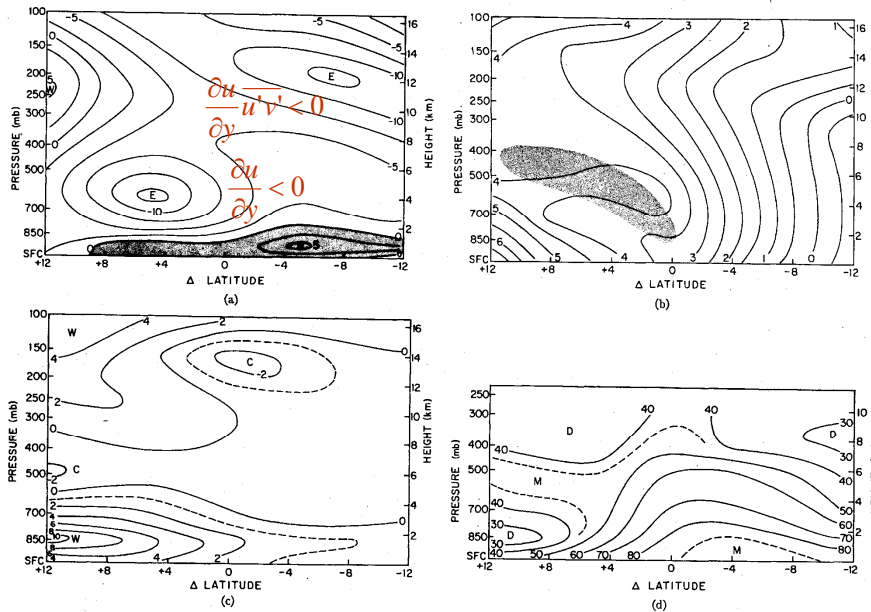
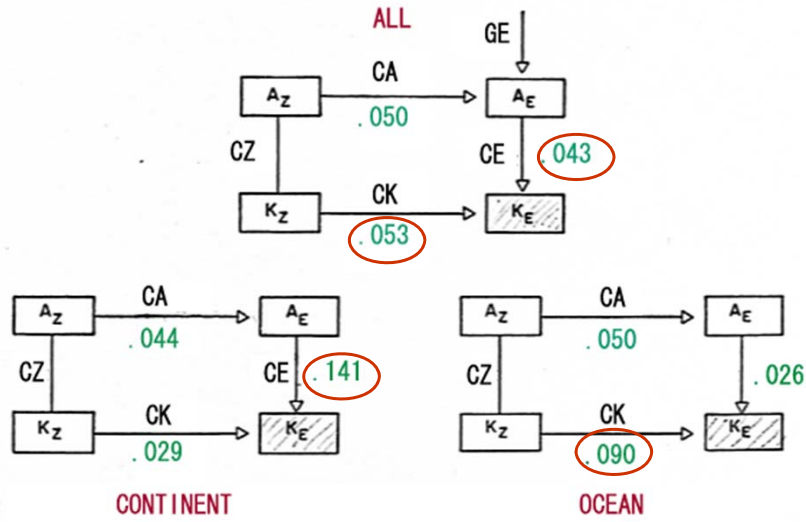


FIG. 2. Zonal mean fields (space and time) for period 23 August to 19 September, 1974. "Zero" latitude corresponds to average latitude of disturbance path, 11°N over land and 12°N over ocean. (a) Zonal wind (m s<sup>-1</sup>); (b) absolute vorticity (10<sup>-4</sup> s<sup>-2</sup>); (c) temperature deviations (°C) from values at Δ latitude; (d) relative humidity (percent).

### アフリカ波動: エネルギー解析



Energetics of African Waves (Norquist et al. 1977)

### 熱帯擾乱の発生



## 順圧不安定の必要条件

$$c_i \int_{y_1}^{y_2} \frac{\left( \beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right)}{|u-c|^2} |\psi|^2 dy = 0$$

不安定波が存在するためには、 $c_i > 0$ でなければならない

つまり、 $\beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2}$  (場の絶対渦度のy微分)が

$y_1 < y < y_2$ の領域のどこかで符号を変えなければならない。  
領域のどこかで絶対渦度のy微分が0になる必要がある。

## 内部ジェット的不安定の必要条件

$$c_i \left[ \frac{f_0^2}{\sigma} \left[ \int_{y_1}^{y_2} \frac{|\psi|^2}{|u-c|^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} dy \right]_{p_0} - \frac{f_0^2}{\sigma} \left[ \int_{y_1}^{y_2} \frac{|\psi|^2}{|u-c|^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} dy \right]_{p_i} + \int_{p_i}^{p_0} \int_{y_1}^{y_2} \frac{|\psi|^2}{|u-c|^2} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} dy dp \right] = 0$$

B.C.  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial p} = 0$ ,  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial p} = 0$ の場合、 $c_i \neq 0$  が成り立つためには

$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y}$ は、考えている領域のどこかで符号を変えなければいけない。

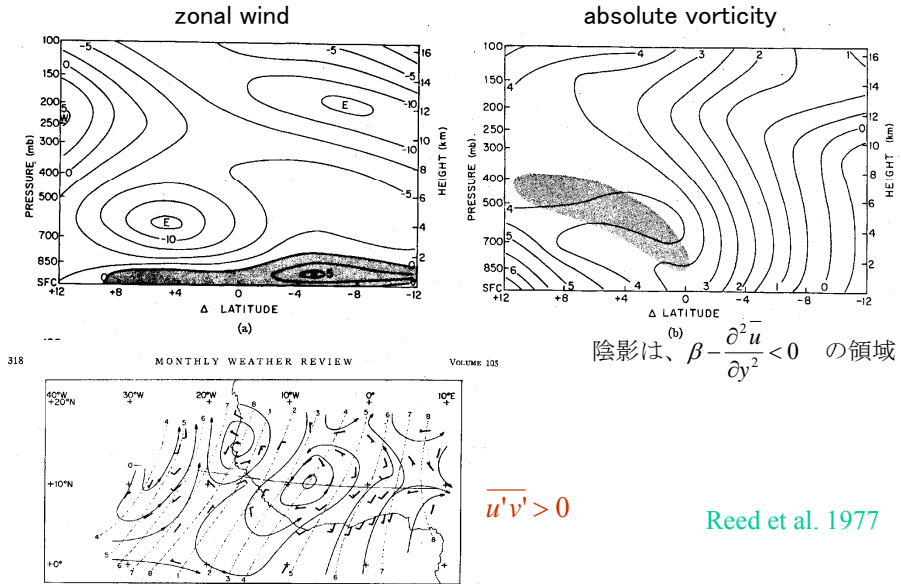
つまり、 $\frac{\partial \bar{q}}{\partial y}$ は、考えている領域のどこかで0になる必要がある。

なお、 $q = f + \zeta_s + f_0^2 \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi^1}{\partial p} \right)$ ,  $\sigma = -\frac{\alpha}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$ : 簡単のため今後定数とする

$$\bar{q} = \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} + \beta(y - y_0) + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial p^2}$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial p^2}$$

### 内部ジェット的不安定の例 アフリカ波動の場



### 順圧不安定の例: ITCZ擾乱

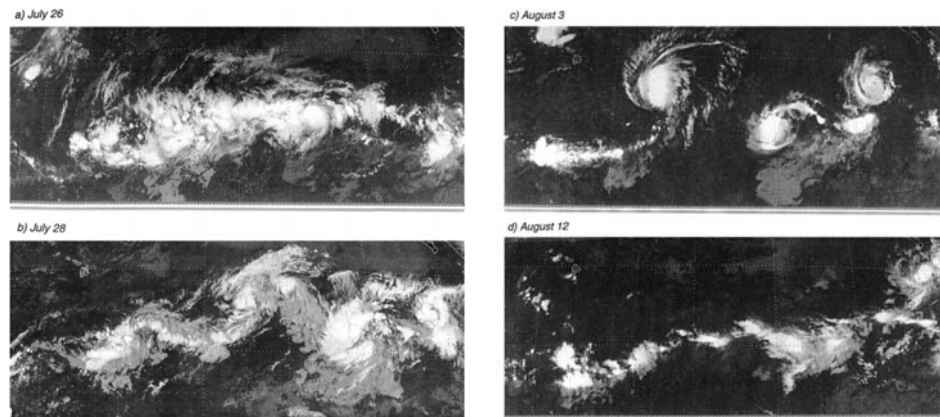


FIG. 1. GOES IR images at 1600 UTC on (a) 26 July, (b) 28 July, (c) 3 August, and (d) 12 August 1988 showing a case of ITCZ breakdowns. The images cover a region of the eastern Pacific between 27N and 24N, 130°W and 105°W. Hawaii is at the upper left and Baja California at the upper right corners of the images.

FIG. 1. (Continued)

ITCZ breaking from the barotropic & baroclinic instability aided by convectively generated PV.

(対流の非断熱加熱によって生成されたpotential vorticityによって、barotropic and baroclinic instabilityの条件が整う)

Nieto Ferreila and Schubert (1997), Wang and Magnusdottir (2005)

**参考文献****Text Books**

- ・岸保 勲三郎, 時岡 達志, 1982 : 大気力学講座4 大気の大循環, 東京大学出版会, 256pp.
- ・新田, 1982: 気象学のプロムナード7 熱帯の気象, 東京堂出版, 215pp.
- ・小倉義光 1978: 気象力学通論, 東京大学出版会, 249pp.
- ・Holton, 1994: An introduction to dynamic meteorology 3<sup>rd</sup> Ed., Academic Press, 511pp.

**Papers**

- Gray, W. M., 1979: Hurricanes: their formation, structure and likely role in the tropical circulation. Meteorology over the Tropical Oceans. D. B. Show ed., Royal Meteorological Society, 155–218.
- Nitta, Ts., 1970: Statistical study of tropospheric wave disturbances in the tropical Pacific region, J. Meteor. Soc. Japan, 48, 47–60.
- Nitta, Ts., 1972: Energy budget of wave disturbances over the Marshall Islands during the years of 1956 and 1958. J. Meteor. Soc. Japan, 50, 71–84.
- Nitta, Ts. and Y. Takayabu, 1985: Global analysis of the lower tropospheric disturbances in the tropics during the northern summer of the FGGE year. Part II: Regional characteristics of the disturbances. Pure and Appl. Geophysics, bf 123, 272–292.
- Norquist, D.C., E.E. Recker and R.J. Reed, 1977: The energetics of African wave disturbances as observed during Phase III of GATE, Mon. Wea. Rev., 105, 334–342.
- Reed, R. J., Norquist, D. C., and E. E. Recker, 1977: The structure and properties of African wave disturbances as observed during Phase III of GATE, Mon. Wea. Rev., 105, 317–333.
- Reed, R.J. and E.E. Recker, 1971: Structure and properties of synoptic-scale wave disturbances in the equatorial western Pacific. J. Atmos. Sci., 28, 1117–1133.
- Wallace, J. M., and C. P. Chang, 1969: Spectrum analysis of large-scale wave disturbances in the tropical lower troposphere. J. Atmos. Sci., 26, 1010–1025
- Yanai, M., T. Maruyama, T. Nitta, and Y. Hayashi, 1969: Power spectra of large-scale disturbances over the tropical Pacific, J. Meteor. Soc. Japan, 46, 308–323.

**APPENDIX**

熱帯擾乱のエネルギー収支解析

有効位置エネルギー

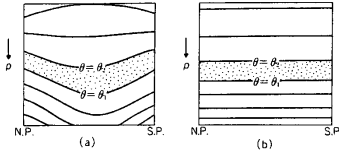


図 3.29 有効位置エネルギーの考え方。(a)のような温度分布をしているとき断熱的な配置換えにより全位置エネルギーを最小にした状態が(b)で示される。 $\theta = \theta_1$ と $\theta = \theta_2$ で囲まれる部分の空気の質量は(a),(b)とも同じ。(a)の状態の有効位置エネルギーは(a)のもつ全位置エネルギーから(b)のもつ全位置エネルギーを引いたもので与えられている。

$$(a) \quad T = \theta \left( \frac{p}{p_0} \right)^\kappa \quad \dots(11)$$

$$(b) \quad T = T_r = \theta \left( \frac{p_r}{p_0} \right)^\kappa \quad \dots(12)$$

$p_r$ :  $\theta$ 面の平均気圧  
 $T_r$ :  $\theta$ 面の平均気温  $\kappa = R/C_p$

気柱内の全位置エネルギーは気柱内のエンタルピー $C_p T$ に等しいから (10/3講義資料参照)

$$(a) \quad E_a = \frac{1}{g} \iint C_p T dp d\sigma = \frac{C_p}{g} \iint \theta \left( \frac{p}{p_0} \right)^\kappa dp d\sigma \quad \dots(13)$$

$$(b) \quad E_b = \frac{1}{g} \iint C_p T_r dp d\sigma = \frac{C_p}{g} \iint \theta \left( \frac{p_r}{p_0} \right)^\kappa dp d\sigma \quad \dots(14)$$

有効位置エネルギーの定義

ある大気状態(a)から拡散が起こらないように断熱的に空気の配置換えを行い、位置エネルギーを最小にした状態を(b)とする。(a),(b)おのこの状態の全位置エネルギーを $E_a, E_b$ とすると有効位置エネルギー $A$ は、次式で定義される。

$$A = E_a - E_b = \frac{C_p}{g} \iint (T - T_r) dp d\sigma = \frac{C_p}{g} \iint T N dp d\sigma \quad \dots(15)$$

ただし、  $N = 1 - \frac{T_r}{T} = 1 - \left( \frac{p_r}{p} \right)^\kappa \quad \dots(16) \quad N$ : 効率因子

$\frac{dA}{dt}$  を求める

熱力学第一法則

$$\frac{d}{dt} C_p T - \alpha \frac{dp}{dt} = Q \quad \frac{d}{dt} C_p T = \alpha \omega + Q \quad \dots(17)$$

一方、(16)より、  $\frac{dN}{dt} = \frac{\kappa}{p} \left( \frac{p_r}{p} \right)^\kappa \frac{dp}{dt} = \frac{R}{C_p} \left( \frac{p_r}{p} \right) \frac{\omega}{p} \quad \dots(18)$

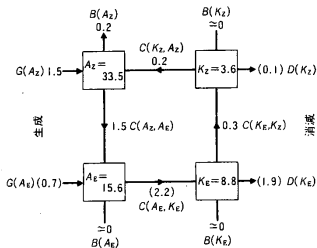


図 3.30 北半球のエネルギー解析 (1958年5月~1963年4月) から求めたエネルギーサイクル (Oort and Peixoto, 1974). エネルギー量は  $J m^{-2}$  の単位、変換量は  $W m^{-2}$  の単位で示されている。( ) 内の数値は推定値。

$N \times (17) + C_p T \times (18)$  より、

$$\frac{d}{dt} C_p N T = N \alpha \omega + \left( \frac{p_r}{p} \right)^\kappa \frac{R T \omega}{p} + N Q = \alpha \omega + N Q \quad \dots(19)$$

単位面積  $\int d\sigma$  当たり

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{g} \iint \frac{d}{dt} C_p N T dp d\sigma = \frac{1}{g} \iint (\alpha \omega + N Q) dp d\sigma \quad \dots(20)$$

前回に求めた運動エネルギーの時間変化を考えると

$$\frac{dK}{dt} + \nabla \cdot (K + \phi) \vec{v} = -\alpha \omega + \vec{v}_p \cdot \vec{F} \quad \dots(21)$$

$\frac{C_p T}{K} \sim 2000$  (前回資料),  $\frac{A}{K} \sim 4-5$  (上図) であることに注意

$$(17) \dots \frac{d}{dt} C_p T = \alpha \omega + Q$$

$$(19) \dots \frac{d}{dt} C_p N T = \alpha \omega + N Q$$

$$(21) \dots \frac{dK}{dt} + \nabla \cdot (K + \phi) \vec{v} = -\alpha \omega + \vec{v}_p \cdot \vec{F}$$

- ① (17)と(21) -  $\alpha \omega$ : 全位置エネルギー→運動エネルギーへの変換項  
 (19)と(21) -  $\alpha \omega$ : 有効位置エネルギー→運動エネルギーへの変換項  
 つまり、エンタルピーの代わりに有効位置エネルギーを用いても  
 運動エネルギーとのやりとりは同一
- ② (17)より、エンタルピーは加熱( $Q>0$ )で増加、冷却( $Q<0$ )で減少  
 (19)より、有効位置エネルギーは、  
 $N>0$  and  $Q>0$  または  $N<0$  and  $Q<0$  で増加  
 $N=(T-T_r)/T$   
 つまり、より暖かいところで加熱、より冷たいところで冷却すると増加

エネルギーサイクル： 帯状平均場(¯)と擾乱 (eddy) との間  
 log- $p$ 座標で考える

$$z^* \equiv -H \ln \frac{p}{p_s}, \quad H = \frac{RT_s}{g}, \quad T_s: \text{global average temperature}$$

$$\text{運動方程式} \quad \frac{du}{dt} - fv = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + X \quad \dots\dots(1)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y} + Y \quad \dots\dots(2)$$

$$\text{連続の式} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z^*} (\rho w^*) = 0 \quad \dots(3), \quad w^* = \frac{Dz^*}{Dt}$$

$$\text{熱力の式} \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_p \cdot \nabla \right) \frac{\partial \phi}{\partial z^*} + N^2 w^* = \frac{\kappa Q}{H} \quad \dots(4)$$

準地衡流を考える。

方程式の変数をロスビー数 ( $R_o = U/fL$ )展開して次元解析を行う。

$$\bar{u} \approx \bar{u}_g + R_o \bar{u}_a \approx \bar{u}_g$$

$$\bar{v} \approx \bar{v}_g + R_o \bar{v}_a \approx R_o \bar{v}_a \quad \because f \bar{v}_g = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

帯状平均場と eddy について、方程式系はそれぞれ (以下  $z^* \rightarrow z$  と表記)

平均場  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - f_0 \bar{v} = -\frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} + \bar{X}$  .....(5)

$$f_0 \bar{u} = -\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} + \bar{Y}$$
 .....(6)

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 \bar{w}) = 0$$
 .....(7)

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} + N^2 \bar{w} = \frac{\kappa \bar{Q}}{H} - \frac{\partial}{\partial y} \bar{v}' \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial z}$$
 ....(8)

eddy  $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) u' - \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) v' = -\frac{\partial \phi'}{\partial x} + X'$  .....(9)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) v' + f_0 v' = -\frac{\partial \phi'}{\partial y} + Y'$$
 .....(10)

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\rho w') = 0$$
 .....(11)

次に  $\langle \rangle \equiv \frac{1}{A} \int_0^\infty \int_{-D}^D \int_0^L (\ ) dx dy dz$  : global average を考える

①  $\bar{K}$  zonal mean kinetic energy  $\langle \rho_0 \bar{u} \times (5) + \rho_0 \bar{v} \times (6) \rangle$  より

$$\left\langle \rho_0 \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial t} \right\rangle = -\rho_0 \bar{v} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} - \rho_0 \bar{u} \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} + \rho_0 \bar{u} \bar{X}$$

ここで連続の式  $\rho_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 \bar{w}) = 0$  より

$$\frac{d}{dt} (\rho_0 \bar{A}) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 \bar{A}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_0 \bar{v} \bar{A}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 \bar{w} \bar{A})$$

左辺は、 $\left\langle \rho_0 \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle \rho_0 \bar{A} \rangle$

より、 $\frac{d}{dt} \left\langle \rho_0 \frac{\bar{u}^2}{2} \right\rangle = \left\langle \rho_0 \bar{\phi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \rho_0 \bar{u}'v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \rho_0 \bar{u} \bar{X} \right\rangle$

$$\left\langle \rho_0 \bar{\phi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right\rangle = -\left\langle \bar{\phi} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 \bar{w}) \right\rangle = \left\langle \rho_0 \bar{w} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right\rangle$$

したがって、 $\frac{d}{dt} \left\langle \rho_0 \frac{\bar{u}^2}{2} \right\rangle = \left\langle \rho_0 \bar{w} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right\rangle + \left\langle \rho_0 \bar{u}'v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \rho_0 \bar{u} \bar{X} \right\rangle$  .....(13)

zonal mean kinetic energy  $\bar{P} \rightarrow \bar{K}$   $K' \rightarrow \bar{K}$  dissipation

②  $\bar{P} \equiv \frac{1}{2} \left\langle \frac{\rho_0}{N^2} \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right)^2 \right\rangle$  zonal mean potential energy

$\left\langle \frac{\rho_0}{N^2} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \times (8) \right\rangle$   $wN^2$ の項  $\rightarrow \left\langle \rho_0 \bar{w} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right\rangle$

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{\rho_0}{2N^2} \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right)^2 \right\rangle = - \left\langle \rho_0 \bar{w} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right\rangle + \left\langle \frac{\rho_0 \kappa \bar{Q}}{N^2 H} \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right) \right\rangle - \left\langle \frac{\rho_0}{N^2} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \left( v' \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right) \right\rangle$$

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{\rho_0}{2N^2} \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right)^2 \right\rangle = - \left\langle \rho_0 \bar{w} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right\rangle + \left\langle \frac{\rho_0 \kappa \bar{Q}}{N^2 H} \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right) \right\rangle + \left\langle \frac{\rho_0}{N^2} v' \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y \partial z} \right\rangle \dots(14)$$

zonal mean available potential energy  $\bar{P} \rightarrow \bar{K}$  generation of  $\bar{P}$  by diabatic processes  $P' \rightarrow \bar{P}$

③  $K'$  eddy kinetic energy 上と同様 ( $\rho_0 u' \times (9) + \rho_0 v' \times (10)$ )より

$$\left\langle \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{u'^2 + v'^2}{2} + \bar{u} \left( u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial v'}{\partial y} \right) + \rho_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} u' v' \right\rangle = - \rho_0 u' \frac{\partial \phi'}{\partial x} - \rho_0 v' \frac{\partial \phi'}{\partial y} + \rho_0 u' X' + \rho_0 v' Y'$$

$$\left\langle \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{u'^2 + v'^2}{2} \right\rangle = \left\langle \rho_0 \bar{w}' \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right\rangle - \left\langle \rho_0 \bar{u}' v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \rho_0 (u' X' + v' Y') \right\rangle \dots(15)$$

eddy kinetic energy  $P' \rightarrow K'$   $K' \rightarrow \bar{K}$  dissipation

④  $P' \equiv \left\langle \frac{\rho_0}{2N^2} \left( \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right)^2 \right\rangle$  eddy potential energy  $\left\langle \frac{\rho_0}{N^2} \frac{\partial \phi'}{\partial z} \times (12) \right\rangle$

$$\left\langle \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\rho_0}{2N^2} \left( \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right)^2 + \frac{\rho_0}{N^2} v' \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi'}{\partial z} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y \partial z} \left( v' \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right) + \rho_0 \bar{w}' \frac{\partial \phi'}{\partial z} = \frac{\rho_0 \kappa}{N^2 H} \bar{Q}' \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right\rangle$$

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{\rho_0}{2N^2} \left( \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right)^2 \right\rangle = - \left\langle \rho_0 \bar{w}' \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right\rangle + \left\langle \frac{\rho_0 \kappa}{N^2 H} \bar{Q}' \left( \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right) \right\rangle - \left\langle \frac{\rho_0}{N^2} v' \frac{\partial \phi'}{\partial z} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y \partial z} \right\rangle \dots(16)$$

eddy available potential energy  $P' \rightarrow K'$  generation of  $P'$  by diabatic processes  $P' \rightarrow \bar{P}$

(13)-(16)をまとめると、

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = [\bar{P}, \bar{K}] + [K', \bar{K}] + \bar{\varepsilon}$$

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = -[\bar{P}, \bar{K}] + [P', \bar{P}] + \bar{G}$$

$$\frac{dK'}{dt} = [P', K'] - [K', \bar{K}] + \varepsilon'$$

$$\frac{dP'}{dt} = -[P', K'] - [P', \bar{P}] + G'$$

$$\begin{aligned}
\text{ここで、} \bar{K} &= \left\langle \rho_0 \frac{\bar{u}^2}{2} \right\rangle, \quad K' = \left\langle \rho_0 \frac{u'^2 + v'^2}{2} \right\rangle \\
\bar{P} &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{\rho_0}{N^2} \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right)^2 \right\rangle, \quad P' = \left\langle \frac{\rho_0}{2N^2} \overline{\left( \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right)^2} \right\rangle \\
[\bar{P}, \bar{K}] &= \left\langle \rho_0 \bar{w} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right\rangle, \quad [P', K'] = \left\langle \rho_0 \overline{w' \frac{\partial \phi'}{\partial z}} \right\rangle \\
[K', \bar{K}] &= \left\langle \rho_0 \bar{u}' v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right\rangle, \quad [P', \bar{P}] = \left\langle \frac{\rho_0}{N^2} \overline{v' \frac{\partial \phi'}{\partial z} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y \partial z}} \right\rangle \\
\bar{G} &= \left\langle \frac{\rho_0 \kappa \bar{Q}}{N^2 H} \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right) \right\rangle, \quad G' = \left\langle \frac{\rho_0 \kappa}{N^2 H} \overline{Q' \left( \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right)} \right\rangle \\
\bar{\varepsilon} &= \left\langle \rho_0 \bar{u} \bar{X} \right\rangle, \quad \varepsilon' = \left\langle \rho_0 (u' X' + v' Y') \right\rangle
\end{aligned}$$

まとめると、

$$\frac{d}{dt} (\bar{K} + K' + \bar{P} + P') = \bar{G} + G' + \bar{\varepsilon} + \varepsilon'$$

## 順圧不安定 barotropic instability

順圧大気， 基本場は東西風  $\bar{u}(y)$

渦度方程式

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \right) (f + \zeta) = 0 \quad \dots(1)$$

$$u = \bar{u}(y) + u', \quad v = v'$$

準地衡流近似

$$u' = -\frac{\partial \psi'}{\partial y}, \quad v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x} \rightarrow \zeta' = \nabla^2 \psi'$$

(1)に入れて線形化

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \psi' + \left( \beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right) \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad \dots(2)$$

$$\psi'(x, y, t) = \psi(y) e^{ik(x-ct)} \quad \dots(3)$$

$$= (\psi_r + i\psi_i) e^{kc_i t} e^{ik(x-c_r t)} \quad \text{たゞかゝら、} c_i > 0 \text{ならば振幅増大、} c = c_r + ic_i$$



(3)を(2)に代入して

$$(\bar{u}-c)\left(\frac{d^2\psi}{dy^2}-k^2\psi\right)+\left(\beta-\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)\psi=0 \quad \dots(4)$$

$y=y_1, y_2$ に壁があると考え、境界条件  $y=y_1, y_2$ で $\psi=0$ とする

(4)の流れが不安定であるための必要条件を求める

$c_i \neq 0$ を仮定すると、 $\bar{u}-c \neq 0$ より、

$$\frac{d^2\psi}{dy^2}-\left(k^2-\frac{\beta-\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}}{\bar{u}-c}\right)\psi=0 \quad \dots(5)$$

$$(\bar{u}-c)^{-1}=\frac{\bar{u}-c_r-ic_i}{(\bar{u}-c_r)^2+c_i^2}$$

$$\delta_r=(\bar{u}-c_r)\left[(\bar{u}-c_r)^2+c_i^2\right]^{-1}$$

$$\delta_i=c_i\left[(\bar{u}-c_r)^2+c_i^2\right]^{-1}$$

(5)を実部と虚部とに分ける

$$\frac{d^2\psi_r}{dy^2}-\left(k^2-\left(\beta-\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)\delta_r\right)\psi_r-\left(\beta-\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)\delta_i\psi_i=0 \quad \dots(6)$$

$$\frac{d^2\psi_i}{dy^2}-\left(k^2-\left(\beta-\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)\delta_r\right)\psi_i-\left(\beta-\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)\delta_i\psi_r=0 \quad \dots(7)$$

(6) $\times\psi_i$ -(7) $\times\psi_r$

$$\psi_i\frac{d^2\psi_r}{dy^2}-\psi_r\frac{d^2\psi_i}{dy^2}-\left(\beta-\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)\delta_i(\psi_r^2+\psi_i^2)=0$$

$$\frac{d}{dy}\left(\psi_i\frac{d\psi_r}{dy}-\psi_r\frac{d\psi_i}{dy}\right)-\left(\beta-\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)\delta_i(\psi_r^2+\psi_i^2)=0$$

$y_1$ から $y_2$ まで積分 B.C.  $y=y_1, y_2$ で $\psi=0$ を使うと

$$c_i\int_{y_1}^{y_2}\frac{\left(\beta-\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)}{|\bar{u}-c|^2}|\psi|^2dy=0 \quad \dots(8)$$

不安定波が存在するためには、 $c_i > 0$ でなければならない

(8)より、これはつまり、 $\beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2}$  (場の絶対渦度の y 微分)が

$y_1 < y < y_2$  の領域のどこかで符号を変えなければならない。

つまり、領域のどこかで絶対渦度の y 微分が 0 になる必要がある。

: [順圧不安定の必要条件]

## 内部ジェット的不安定 ひとつの baroclinic instability

より一般的な傾圧大気で、基本場が鉛直にも変化している場合を考える

基本場は東西風  $\bar{u}(y, p)$

$$u = \bar{u}(y, p) + u', \quad v = v'$$

準地衡流、 $\beta$  平面

ポテンシャル渦度保存 (断熱過程)

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_g \cdot \nabla \right) q = 0 \quad \dots(1)$$

$$u = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} - \frac{\partial \psi'}{\partial y}, \quad v = v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x}$$

$$q = f + \zeta_g + f_0^2 \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right), \quad \sigma = -\frac{\bar{\alpha}}{\theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial p}: \quad \text{簡単のため今後定数とする}$$

$$\bar{q} = \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} + \beta(y - y_0) + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial p^2}$$

以下、前述と同様に線形化して実数部、虚数部に分け、積分する。  
 やや複雑だが、結局、虚数部分は、

$$c_i \left[ \frac{f_0^2}{\sigma} \left[ \int_{y_1}^{y_2} \frac{|\psi|^2}{|u-c|^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} dy \right]_{p_0} - \frac{f_0^2}{\sigma} \left[ \int_{y_1}^{y_2} \frac{|\psi|^2}{|u-c|^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} dy \right]_{p_t} + \int_{p_t}^{p_0} \int_{y_1}^{y_2} \frac{|\psi|^2}{|u-c|^2} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} dy dp \right] = 0$$

B.C.  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial p}_{p_0} = 0, \frac{\partial \bar{u}}{\partial p}_{p_t} = 0$  の場合、 $c_i \neq 0$  が成り立つためには

$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y}$  は、考えている領域のどこかで符号を変えなければいけない。

つまり、 $\frac{\partial \bar{q}}{\partial y}$  は、考えている領域のどこかで0になる必要がある。

: [内部ジェット気流の不安定の必要条件]

$$\text{なお、} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial p^2}$$