# 準地衡流近似

竹広 真一

2016/01/13

ほとんど地衡流バランスしている流れの時間変化を近似的に表現する方程式系を導く.

## 1　地衡流バランス

粘性のない回転系の運動方程式は，次のとおりである.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi. \tag{1}$$

コリオリ加速度 $2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}$ に比べて慣性項 $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ が十分小さいときには次の式が近似的に成り立つ.

$$2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi. \tag{2}$$

これが一般的な地衡流を表す式である.

特に，ポテンシャル $\Phi$ が球対称であるとき，(2) を球座標系で書き下すとつぎのようになる.

$$\begin{aligned}
-2\Omega\sin\theta\cdot v + 2\Omega\cos\theta\cdot u &= -\frac{1}{\rho r\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial\psi}, &(3)\\
2\Omega\sin\theta\cdot u &= -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta}, &(4)\\
-2\Omega\cos\theta\cdot u &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - g. &(5)
\end{aligned}$$

ただし $g = \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}$ である.

# 2 Scaling

ここで注目する運動の形態を羅列する.

1. 半径 $r_0$ の球面上の流体.
2. 緯度 $\theta_0$ を中心とする中緯度での運動を考える. 運動の水平スケールを $L$ とするとき
$$\frac{L}{r_0} \ll 1$$
3. 運動の鉛直スケールを $D$ とするとき
$$\delta \equiv \frac{D}{L} \ll 1$$
4. 流れはほぼ地衡流バランスしている.

各物理量を次のように無次元化する.

$$\begin{aligned} &r - r_0 = D\tilde{z}, \qquad t = T\tilde{t}, \\ &(u, v) = U(\tilde{u}, \tilde{v}), \qquad w = U\frac{D}{L}\tilde{w}. \end{aligned}$$

~ は無次元量であることを表わす. 次に $p, \rho$ のスケーリングを行なう. $p, \rho$ を運動がないときの圧力, 密度 $p_s(z), \rho_s(z)$ とそれからのずれ $p^*, \rho^*$ で表わす.

$$p = p_s(z) + p^*(x, y, z, t), \tag{6}$$
$$\rho = \rho_s(z) + \rho^*(x, y, z, t), \tag{7}$$

ただし $p_s, \rho_s$ は静力学平衡の式を満たすものとする.

$$\frac{\partial p_s}{\partial z} = -\rho_s g.$$

$p^*, \rho^*$ の適当なスケーリングを調べるために, 地衡風バランスの式を調べる. 水平方向のバランスから

$$
\begin{array}{ccccc}
-2\Omega\sin\theta\cdot v & + & 2\Omega\cos\theta\cdot u & = & -\dfrac{1}{\rho r\cos\theta}\dfrac{\partial p}{\partial\phi} \\
2\Omega U & & 2\Omega\dfrac{D}{L}U & & \dfrac{p^*}{\rho_s L} \\
& & & & \\
2\Omega\sin\theta\cdot u & & & = & -\dfrac{1}{\rho r}\dfrac{\partial p}{\partial\theta} \\
2\Omega U & & & & p^*\rho_s L
\end{array}
$$

したがって $p^* \sim O(fU\rho_s L)$ である．ただし $f \equiv 2\Omega$ はコリオリパラメターである．

次に鉛直方向のバランスから

$$
\begin{array}{ccccc}
-2\Omega\cos\theta\cdot(\rho_s+\rho^*) & = & -\dfrac{\partial p^*}{\partial z} & -\rho^* g \\
fU\rho_s & & \dfrac{fU\rho_s L}{D} & \rho^* g \\
\delta & & 1 &
\end{array}
$$

$\delta \ll 1$ の仮定から右辺は無視できる．したがって $\rho^*$ のスケーリングは

$$
\rho^* \sim O\left(\frac{fUL}{gD}\rho_s\right) \sim O(\varepsilon F\rho_s)
$$

ただし $\varepsilon$ は Rossby 数，$F$ は Rossby 変形半径 $R_d \equiv \dfrac{gD}{f^2}$ と運動の水平スケールとの比である．

$$
\begin{aligned}
\varepsilon \equiv \frac{L}{fU} = \frac{L}{2\Omega U\sin\theta}, \\
F \equiv \frac{f^2L^2}{gD}.
\end{aligned}
$$

以上の結果から $p, \rho$ を次のようにスケーリングする．

$$
\begin{aligned}
p = p_s(z) + fUL\rho_s\tilde{p}, \\
\rho = \rho_s + \varepsilon F\rho_s(z)\tilde{\rho}.
\end{aligned}
$$

# 3 球座標系の運動方程式・連続の式

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{dt} + \rho\left\{\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2w}{r} + \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial(v\cos\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi}\right\} = 0, && (8)\\
&\frac{du}{dt} + \frac{uw}{r} - \frac{uv}{r}\tan\theta - 2\Omega v\sin\theta + 2\Omega w\cos\theta = -\frac{1}{\rho r\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial\phi}, && (9)\\
&\frac{dv}{dt} + \frac{wv}{r} + \frac{u^2}{r}\tan\theta + 2\Omega u\sin\theta = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta}, && (10)\\
&\frac{dw}{dt} - \frac{u^2+v^2}{r} - 2\Omega u\cos\theta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - g, && (11)
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + w\frac{\partial}{\partial r}.
$$

である．これらを次のように無次元化する．

$$
\begin{aligned}
&t = T\tilde{t},\\
&(u,v) = U(\tilde{u},\tilde{v}), \quad w = U\delta\tilde{w},\\
&r = r_0\tilde{r} = r_0\left(1 + \frac{L}{r_0}\delta z\right), \quad (d\phi, d\theta) = \frac{L}{r_0}(d\tilde{\phi}, d\tilde{\theta}),\\
&p = p_s(z) + f_0 UL\rho_s(z)\tilde{p}, \quad \rho = \rho_s(z)\{1 + \varepsilon F\tilde{\rho}\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon F\frac{d\rho}{dt} + \varepsilon w\frac{1}{\rho_s}\frac{d\rho_s}{dz}(1+\varepsilon F\rho)\\
&\quad + \varepsilon(1+\varepsilon F\rho)\left\{\frac{\partial w}{\partial z} + \delta\frac{L}{r_0}\frac{2w}{r} + \frac{L}{r_0 r\cos\theta}\frac{\partial(v\cos\theta)}{\partial\theta} + \frac{L}{r_0 r\cos\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi}\right\} = 0, && (12)\\
&\frac{du}{dt} + \varepsilon\frac{L}{r_0}\left(\delta\frac{uw}{r} - \frac{uv}{r}\tan\theta\right) - v\frac{\sin\theta}{\sin\theta_0} + \delta w\frac{\cos\theta}{\sin\theta_0} = -\frac{L}{r_0 r(1+\varepsilon F\rho)\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial\phi} && (13)\\
&\frac{dv}{dt} + \varepsilon\frac{L}{r_0}\left(\delta\frac{wv}{r} + \frac{u^2}{r}\tan\theta\right) + u\frac{\sin\theta}{\sin\theta_0} = -\frac{L}{r_0 r(1+\varepsilon F\rho)}\frac{\partial p}{\partial\theta}, && (14)\\
&(1+\varepsilon F\rho)\left\{\delta\frac{dw}{dt} - \varepsilon\frac{L}{r_0}\frac{u^2+v^2}{r} - u\frac{\cos\theta}{\sin\theta_0}\right\} = -\frac{1}{\delta\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_s p) - \frac{1}{\delta}\rho, && (15)
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\frac{d}{dt} \equiv \varepsilon_T\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\left\{\frac{L}{r_0}\frac{u}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{L}{r_0}\frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + w\frac{\partial}{\partial z}\right\}
$$

である．

さらに $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ を $\theta_0$ において展開する.

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &= \sin(\theta-\theta_0)\cos\theta_0 + \cos(\theta-\theta_0)\sin\theta_0 \\
&\sim \frac{L}{r_0}y\cos\theta_0 + \sin\theta_0\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{L}{r_0}\right)^2 y^2+\cdots\right\}, \\
\cos\theta &= \cos(\theta-\theta_0)\cos\theta_0 - \sin(\theta-\theta_0)\sin\theta_0 \\
&\sim \cos\theta_0\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{L}{r_0}\right)^2 y^2+\cdots\right\} - \sin\theta_0\left\{\frac{L}{r_0}y+\cdots\right\}, \\
\tan\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\
&= \frac{\frac{L}{r_0}y\cos\theta_0 + \sin\theta_0\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{L}{r_0}\right)^2 y^2+\cdots\right\}}{\cos\theta_0\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{L}{r_0}\right)^2 y^2+\cdots\right\} - \sin\theta_0\left\{\frac{L}{r_0}y+\cdots\right\}} \\
&= \frac{1}{\cos\theta_0}\left[\frac{L}{r_0}y\cos\theta_0 + \sin\theta_0\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{L}{r_0}\right)^2 y^2+\cdots\right\}\right] \\
&\quad \times\left[1-\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{L}{r_0}\right)^2 y^2 - \tan\theta_0\frac{L}{r_0}y+\cdots\right\}\right] \\
&= \tan\theta_0 + \frac{L}{r_0}y\tan\theta_0\cdot\sin\theta_0 + \cos\theta_0\frac{1}{\cos\theta_0} \\
&\quad +\left(\frac{L}{r_0}\right)y^2\frac{1}{\cos\theta}\left\{\frac{1}{2}\sin\theta_0 - \frac{1}{2}\sin\theta_0 + \cos\theta_0\cdot\tan\theta_0\right\} \\
&= \tan\theta_0 + \frac{1}{\cos^2\theta_0}\frac{L}{r_0}y + \tan\theta_0\left(\frac{L}{r_0}\right)^2 y^2+\cdots
\end{aligned}
$$

これらを (12)〜(15) に代入する. さらに各物理量を $\varepsilon$ で展開し, 各 order でまとめる.

$$
\begin{aligned}
u &= u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \cdots \\
r &= 1 + \delta\frac{L}{r_0}z
\end{aligned}
$$

また, $F \sim O(\varepsilon)$ とする.

# 4 局所直交座標系

いま考える運動は, 緯度 $\theta_0$ (中緯度) を中心とする水平スケール $L \ll r_0$ であった. そこで, 緯度 $\theta$ 経度 $\phi$ を $\theta=\theta_0, \phi=0$ において展開して表現する.

$$
X = \frac{r_0}{L}\phi\cos\theta_0,
$$
$$
y = \frac{r_0}{L}(\theta-\theta_0)
$$

これより $\phi, \theta$ での微分は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \phi} &= \frac{r_0}{L} \cdot \theta_0 \frac{\partial}{\partial x}, \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{r_0}{L} \frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

(12)〜(15) は次のようになる.

$$
\varepsilon^2 F \frac{d\rho}{dt} + \varepsilon w (1 + \varepsilon F \rho) \frac{1}{\rho_s} \frac{d\rho_s}{dz}
+ \varepsilon (1 + \varepsilon F \rho) \left\{ \frac{\partial w}{\partial z} + \delta \frac{L}{r_0} \frac{2w}{r} - \frac{L}{r_0} \frac{v \tan\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\cos\theta_0}{r \cos\theta} \frac{\partial u}{\partial x} \right\} = 0, \tag{16}
$$

$$
\varepsilon \frac{du}{dt} + \varepsilon \frac{L}{r_0} \left( \delta \frac{uw}{r} - \frac{uv}{r} \tan\theta \right) - v \frac{\sin\theta}{\sin\theta_0} + \delta w \frac{\cos\theta}{\sin\theta_0} = - \frac{\cos\theta_0}{r(1 + \varepsilon F \rho) \cos\theta} \frac{\partial p}{\partial x} \tag{17}
$$

$$
\varepsilon \frac{dv}{dt} + \varepsilon \frac{L}{r_0} \left( \delta \frac{wv}{r} + \frac{u^2}{r} \tan\theta \right) + u \frac{\sin\theta}{\sin\theta_0} = - \frac{1}{r(1 + \varepsilon F \rho)} \frac{\partial p}{\partial y}, \tag{18}
$$

$$
(1 + \varepsilon F \rho) \left\{ \delta \varepsilon \frac{dw}{dt} - \varepsilon \frac{L}{r_0} \frac{u^2 + v^2}{r} - u \frac{\cos\theta}{\sin\theta_0} \right\} = - \frac{1}{\delta \rho_s} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_s p) - \frac{1}{\delta} \rho, \tag{19}
$$

ただし

$$
\frac{d}{dt} \equiv \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} + \left\{ \frac{u \cos\theta_0}{r \cos\theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right\}
$$

である.

$O(\varepsilon^0)$ より

$$
\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} + \frac{w^{(0)}}{\rho_s} \frac{d\rho_s}{dz} + \frac{\partial w^{(0)}}{\partial z} = 0, \tag{20}
$$

$$
-v^{(0)} = - \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x}, \tag{21}
$$

$$
u^{(0)} = - \frac{\partial p^{(0)}}{\partial y}, \tag{22}
$$

$$
- \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_s p^{(0)}) - \rho^{(0)} = 0. \tag{23}
$$

(21), (22) より

$$
\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} = 0.
$$

これを (20) に代入して

$$
\frac{\partial}{\partial z} (\rho_s w^{(0)}) = 0.
$$

ここで $z = \mathrm{const.}$ なる境界面があると仮定する．その表面で $w = 0$ でなければならない[1]．よって

$$w^{(0)} = 0$$

(21)，(22) は直交座標系における地衡風バランスの式，(23) は静水圧の式である．

$O(\varepsilon^1)$ より

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} + \frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_s w^{(1)}) - \frac{L}{\varepsilon r_0} v^{(0)} \tan\theta_0 + \tan\theta_0 \frac{L}{\varepsilon r_0} y \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} = 0, \tag{24}$$

$$\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + u^{(0)}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + v^{(0)}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} - v^{(1)} - v^{(0)}\cot\theta_0 \frac{L}{\varepsilon r_0} y = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x} - \frac{L}{\varepsilon r_0} y \tan\theta_0 \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x}, \tag{25}$$

$$\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + u^{(0)}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} + v^{(0)}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} + u^{(1)} + u^{(0)}\cot\theta_0 \frac{L}{\varepsilon r_0} y = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x}, \tag{26}$$

$$-u^{(0)}\tan\theta_0 = -\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}(p^{(1)}\rho_s) - \rho^{(1)}. \tag{27}$$

$-\dfrac{\partial}{\partial y} \times (25) + \dfrac{\partial}{\partial x} \times (26)$ より

$$\frac{d_0 \zeta^{(0)}}{dt} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} + \frac{L}{\varepsilon r_0}\cot\theta_0 \cdot v^{(0)} + \frac{L}{\varepsilon r_0} y \cot\theta_0 \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y}\right)$$
$$= \frac{L}{\varepsilon r_0}\tan\theta_0 \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x} + \frac{L}{\varepsilon r_0} y \tan\theta_0 \frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial x \partial y}.$$

ただし

$$\frac{d_0}{dt} \equiv \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t} + u^{(0)}\frac{\partial}{\partial x} + v^{(0)}\frac{\partial}{\partial y},$$
$$\zeta_0 \equiv \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) p^{(0)},$$

である．(24) を用いてさらに変型すると

$$\frac{d\zeta^{(0)}}{dt} + \beta v^{(0)} = \frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_s w^{(1)}) \tag{28}$$

となる．$\beta \equiv \dfrac{L}{\varepsilon r_0}\cot\theta_0$ である．

[1] ここでは境界条件として $w = 0$ at $z = \mathrm{const.}$ を与えた．しかし $w$ として，粘性境界層の上部での値を用いることも行なわれる（例えば Ekman Layer の解を用いる）．このときは改めて境界条件を考慮して方程式を構成し直す必要がある．

# 5 熱力学の式

$\varepsilon^1$ の鉛直速度 $w^{(1)}$ を見積もるために熱力学の式を用いる．ここで使う式は断熱の式

$$\frac{ds}{dt} = 0, \tag{29}$$

である．理想気体の場合はポテンシャル温度 $\theta \equiv T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{R}{C_p}} = \frac{p_0}{\rho R}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{R}{C_p}}$ で書き直すことができる．

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \tag{30}$$

$p_0$ は標準となる圧力で一定である．

さて，先にスケーリングした $p, \rho$ を用いて $\theta$ を表わす．

$$\ln\theta = \frac{1}{\gamma}\ln p - \ln\rho + \mathrm{const.}$$

これに $p = p_s(z) + f_0 UL\rho_s(z)\tilde{p}, \quad \rho = \rho_s(z)\{1 + \varepsilon F\tilde{\rho}\}$ を代入すると

$$\begin{aligned}
\ln\theta &= \frac{1}{\gamma}\ln\left\{p_s\left(1 + \frac{f_0 UL\rho_s}{p_s}\tilde{p}\right)\right\} - \ln\{\rho_s(1 + \varepsilon F\tilde{\rho})\} + \mathrm{const.} \\
&= \frac{1}{\gamma}\ln p_s(z) - \ln\rho_s(z) + \mathrm{const.} \\
&\quad + \frac{1}{\gamma}\ln\left(1 + \varepsilon\frac{f_0^2 L^2\rho_s}{p_s}\tilde{p}\right) - \ln(1 + \varepsilon F\tilde{\rho}) \\
&\sim \frac{1}{\gamma}\ln p_s(z) - \ln\rho_s(z) + \mathrm{const.} \\
&\quad \varepsilon\frac{1}{\gamma}\frac{f_0^2 L^2\rho_s}{p_s}\tilde{p} - \varepsilon F\tilde{\rho} + O(\varepsilon^2 F)
\end{aligned}$$

ただし $\varepsilon$ は微小として $\ln(1 + \varepsilon x) \sim \varepsilon x - \frac{1}{2}\varepsilon^2 x^2 + \cdots$ と展開した．そこで $\theta$ を次のように表わすことにする．

$$\theta = \theta_s(z)\{1 + \varepsilon F\tilde{\theta}(x, y, z, t)\}.$$

ただし $\theta_s(z) \equiv \frac{1}{\gamma}\ln p_s - \ln\rho_s + \mathrm{const.}$ である．

$\tilde{\theta} = \theta^{(0)} + \varepsilon\theta^{(1)} + \varepsilon\theta^{(2)} + \cdots$ と展開すると

$$\varepsilon F(\theta^{(0)} + \varepsilon\theta^{(1)} + \cdots) \sim \frac{1}{\gamma}\varepsilon\frac{f_0^2 L^2\rho_s}{p_s}(p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \cdots) - \varepsilon F(\rho^{(0)} + \varepsilon\rho^{(1)} + \cdots)$$

$O(\varepsilon^1)$ からは

$$\theta^{(0)} = \frac{1}{\gamma F}\frac{f_0^2 L^2 \rho_s}{p_s} - \rho^{(0)} = \frac{1}{\gamma}\frac{gD}{p_s}\rho_s - p^{(0)} - \rho^{(0)}$$

$p^{(0)}$ と $\rho^{(0)}$ の関係，$p_s$ と $\rho_s$ の関係を用いると

$$\begin{aligned}
\theta^{(0)} &= \frac{1}{\gamma}\frac{gD}{p_s}\left(-\frac{1}{gD}\frac{\partial p_s}{\partial z}\right)p^{(0)} + \frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_s p^{(0)}) \\
&= p^{(0)}\left(\frac{\partial}{\partial z}\ln\rho_s - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial z}\ln p_s\right) + \frac{\partial p^{(0)}}{\partial z} \\
&= \frac{1}{\theta^{(0)}}\frac{\partial \theta_s}{\partial z}p^{(0)} - \frac{\partial p^{(0)}}{\partial z}.
\end{aligned}$$

ここで重要な仮定

$$\frac{1}{\theta_s}\frac{\partial \theta_s}{\partial z} = O(\varepsilon).$$

を導入する．これより $\theta^{(0)}$ と $p^{(0)}$ の関係は次のような簡単な式で表わされる．

$$\theta^{(0)} = \frac{\partial p^{(0)}}{\partial z}. \tag{31}$$

断熱の式 $\dfrac{d\theta}{dt} = 0$ に戻ろう．$\theta$ の表現を代入して $\varepsilon$ の各 order でまとめると $O(\varepsilon)$ の式より

$$\varepsilon F\theta_s \frac{d\theta^{(0)}}{dt} + \varepsilon w^{(1)}\frac{\partial \theta_s}{\partial z} = 0.$$

よって

$$\frac{d\theta^{(0)}}{dt} + S(z)w^{(1)} = 0, \tag{32}$$

ただし $S(z) \equiv \dfrac{1}{F\theta_s}\dfrac{\partial \theta_s}{\partial z}$ である．$S(z) \sim O(\varepsilon)$ であることを仮定した．

# 6 準地衡風ポテンシャル渦度保存則

(32) を 渦度方程式 (28) に代入する．(28) の右辺は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_s w^{(1)}) &= \frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\rho_s\left(-\frac{1}{S}\frac{d\theta^{(0)}}{dt}\right)\right\} \\
&= -\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_s}{S}\theta^{(0)}\right)\right\} + \frac{1}{S}\left(\frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right).
\end{aligned}$$

ここで (31) 式と地衡風バランス (21), (22) を用いると，右辺第 2 項は 0 になる. よって (28) は

$$\frac{d}{dt}\left\{\zeta^{(0)} + \frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_s}{S}\theta^{(0)}\right)\right\} + \beta v^{(0)} = 0. \tag{33}$$

$\theta^{(0)}$ を $p^{(0)}$ で表わし，さらに $p^{(0)}$ は $\varepsilon^0$ 次の流れの流線関数でもあるから $p^{(0)}$ を $\psi$ に書き直して

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_s}{S}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \beta y\right\} = 0. \tag{34}$$

これが準地衡流ポテンシャル渦度方程式 (Quasi-Geostrophic Potential Vorticity Equation) である.

# 文献

Pedlosky,J.,1979 : Geophysical Fluid Dynamics. Springer-Verlag. 710pp.