線型不安定問題の解法

竹広 真一

2016/01/13

定常な 2 次元平行シアー流 (plane parallel shear flow) の線型安定性を調べる具体的な手法を説明する．一つは初期値問題を解く方法，他の一つは固有値問題として扱う方法である．

1 2 次元平行シアー流 (plane parallel shear flow)

基本場[1]として図１のような状況を考える．基本場の流れは定方向である（平行流）．その方向を x 軸とする．境界も x 軸に平行であり，そこでの条件は x 軸方向に一様であるとする[2]．y 軸，z 軸は x 軸と垂直な方向にとるが，基本場の流れの大きさ，及び他の物理量は y のみの関数で与えられるものとする（２次元）．

図１．２次元平行シアー流

基本場は x について不変であるから擾乱 ($\Psi'(x,y,t)$ と書いておく) の振舞いを表現する線型方程式と境界条件も x について不変となる．このとき，Fourier 変換を用いて擾乱を求めるのが有効である．

$$\Psi'(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(k,y,t)e^{ikx}dk, \tag{1}$$
$$\psi(k,y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi'(x,y,t)e^{-ikx}dx. \tag{2}$$

2 初期値問題

線型安定性を調べる手法の一つに，初期値問題を解く方法がある．初期擾乱を具体的に与え，それがどのように時間変化していくかを見る方法である．与えた初期擾乱の振幅が時間とともに増大すれば，基本場は不安定であると判定される．初期値問題を解く一般的な手順は次のようになる．

1. Laplace 変換

   (1) を支配方程式系に代入して，擾乱の Fourier 変換 $\psi(k,y,t)$ に対する線型方程式 (3) と境界条件 (4) を得る．

   $$L_k[\psi(k,y,t)] = 0, \tag{3}$$
   $$M_k[\psi(k,y,t)] = 0 \quad at \quad y=y_1,\ y_2. \tag{4}$$

   L_k, M_k は波数 k を parameter に持つ y,t に関する微分演算子，$y=y_1,\ y_2$ は境界を表す．$\psi(k,y,t)$ に対する Laplace 変換を $\eta(k,y,s)$ とする．

   $$\eta(k,y,s) = \int_0^{\infty}\psi(k,y,t)e^{-st}dt.$$

   (3),(4) を Laplace 変換して $\eta(k,y,s)$ の従う方程式を導く．

   $$L_{k,s}[\eta(k,y,s)] = F[\psi(k,y,0)], \tag{5}$$
   $$M_{k,s}[\eta(k,y,s)] = G[\psi(k,y,0)] \quad at \quad y=y_1,\ y_2. \tag{6}$$

[1]以後，安定性を調べる解，またはそれに相当する流れの場を基本場と呼ぶ．

[2]境界条件としては剛体壁である必要はない．x 軸方向に一様である条件であれば以下の議論が成立する．

よく用いられる境界条件を以下にまとめる．

1. $y=y_1,y_2$ に剛体壁をおく ($v=0$).
2. $y=\pm\infty$ まで流体が広がっていて，そこでは運動が生じていない ($p=0$).
3. $y=\pm\infty$ まで流体が広がっていて，$y=\pm\infty$ に向かってエネルギーが射出されている場合 (radiation condition).

$L_{k,s}$，$M_{k,s}$ は L_k，M_k の $\dfrac{\partial}{\partial t}$ を s に置き換えた y に関する微分演算子，F と G は ψ の初期値及び時間微分の初期値 $\psi(k,y,0)$，$\dfrac{\partial^n \psi}{\partial t^n}|_{t=0}$ （階数は L_k に含まれる時間微分の項による) からなる．

2. 擾乱の Laplace 変換を求める

   空間に関する微分方程式 (5) を境界条件 (6) の下で解く．その一般的な手順は次のようになる．

   (a) (5) の斉次方程式 $L_{k,s}[\eta(k,y,s)]=0$ の独立な解 $\eta_i(k,y,s)$ （i は 1 から $L_{k,s}$ の y 微分の最高階数まで）を求める．

   (b) (5) の特解 $\eta_s(k,y,s)$ を求める．(5) の一般解は，独立解の線型結合と特解との和で表わされる．

$$\eta(k,y,s)=\sum_i A_i\eta_i(k,y,s)+\eta_s(k,y,s). \tag{7}$$

   (c) 境界条件 (6) より，係数 A_i を定める．

3. 逆 Laplace 変換

$$\psi(k,y,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty}\eta(k,y,s)e^{st}ds. \tag{8}$$

   逆変換を行なうための収束座標 s_0 は $\eta(k,y,s)$ の s に関する全ての特異点（極・分岐点）を左にみるように定められる（図２）．

4. 逆 Fourier 変換

   $\psi(k,y,t)$ を逆 Fourier 変換して実空間での解を得る．

$$\Psi'(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(k,y,t)e^{ikx}dk. \tag{9}$$

図 2. 逆 Laplace 変換の積分路

2.1 線型不安定問題を初期値問題として扱う場合の問題点

1. 基本場の流れが線型安定，あるいは中立であることを確かめるには，全ての初期条件について解を求める必要がある．このことを実際に行なうのは不可能である．ただし，基本場が線型不安定であることを示すには，振幅が時間的に増大していく擾乱が一つ存在することを示せば十分である．
2. 形式的には，任意の基本場 · 境界条件 · 初期条件について上の手順で解を求めることができる．しかし，具体的にその手順を実行することは一般に難しい．特に逆 Laplace 変換の計算が困難である．

3 固有値問題

初期値問題を実際に解くことは容易ではない．そこで解に関するある構造を設定し，その解の振幅の時間変化を調べることが行なわれる．振幅が時間的に増大するものが存在すれば，基本場は不安定であると判定される．その一般的な手順は次のようになる．

1. Fourier 変換

   先に述べたように，擾乱の従う線型方程式と境界条件は x について不変となるので，Fourier 変換が有効である．ここで重要なことは，Fourier 変換に e^{ikx} をかけた $\psi(k,y,t)e^{ikx}$ が線型方程式系の解となることである．以下では 1 つの波数 k を取り出して

   $$\Psi'(x,y,t) = \psi(k,y,t)e^{ikx} \tag{10}$$

   の形の解を考えることにする [1]．(10) 右辺は複素関数であるが，物理的意味を持つのはその実数部のみであることに注意しよう．

2. 時間空間の変数分離

   擾乱の従う線型方程式は時間 t についても不変であるから，時間 · 空間を変数分離した解を考えることが出来る．

   $$\Psi'(x,y,t) = \xi(k,y)e^{ik(x-ct)} \tag{11}$$

[1] 線型不安定であることを示すには，一つの波数を取り出して考えることで充分である．安定性の条件を満たさない波数が一つでも存在すれば線型不安定であると判断できる．

c は変数分離を行なうときの分離定数である．(11) を (3),(4) に代入して，波数 k と変数分離定数 c を parameter に持つ $\xi(k,y)$ についての微分方程式と境界条件が得られる．

$$L_{k,-ikc}[\xi(k,y)] = 0, \tag{12}$$
$$M_{k,-ikc}[\xi(k,y)] = 0 \quad at \;\; y = y_1,\ y_2. \tag{13}$$

3. 固有値問題

   (12) の微分方程式に対して境界条件 (13) を満たす c を求める．これは c に関する固有値問題であり，対応する $\xi(k,y)$ は固有関数である．

4. 安定性の判定

   このようにして求めた固有関数 ξ のうち，$\mathrm{Im}[c] > 0$ なる固有値を持つものは，時間について指数関数的に振幅が大きくなる擾乱 Ψ' に対応する．これは安定性の条件を満たさない．したがって，求めた固有値 c のうち一つでも $\mathrm{Im}[c] > 0$ であるものが存在すれば，基本場は線型不安定であると判定できる．

   しかし求めた固有値がすべて $\mathrm{Im}[c] < 0$ であるからといって線型安定，あるいは $\mathrm{Im}[c] \le 0$ であるからといって線型中立であるとはかぎらないことに注意する必要がある．その理由として，次の 2 点がある．

   (a) 第 1 の理由として，(あなたが) 求めた固有関数系 $\{\xi_i\}$ が完全系となる保証がないことが挙げられる．完全系をなさない場合は，固有関数系の重ね合わせで表現できない擾乱が存在する．この擾乱の振舞いが安定性の条件を破る可能性が残るのである．しかし，完全系でない場合でも，$\mathrm{Im}[c] > 0$ である固有値が一つでもあれば線型不安定であるといえる．

   (b) 第 2 の理由として，求めた固有関数系 $\{\xi_i\}$ が完全系であっても，擾乱のノルム (基本場との距離) を定める内積について直交系であるとは限らないことが挙げられる．擾乱の内積とノルムを次のように定義する．

   $$[\Psi'_i, \Psi'_j] = \int_{y_1}^{y_2} \Psi'_i {\Psi'_j}^* dy,$$
   $$|\Psi'_i|^2 = [\Psi'_i, \Psi'_i].$$

   擾乱の振幅の 2 乗の 1 波長平均とノルムとの関係は次のようになる．

   $$< \Psi'_i, \Psi'_i >= \frac{1}{2}|\Psi'_i|^2$$

   ただし $< f, g >= (k/2\pi)\int_0^{\frac{2\pi}{k}} \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{Re}[f] \cdot \mathrm{Re}[g] dxdy$ である．

固有関数系 $\{\xi_i\}$ が直交系でないとき，固有関数を重ね合わせたもののノルムの 2 乗は各固有関数のノルムの 2 乗の和とはならない．

$$\Psi' = \sum_i a_i \Psi'_i = \sum_i a_i \xi_i \ e^{ik(x-ct)},$$

$$\text{ただし} \quad |\xi_i|^2 = 1$$

に対して

i. $\{\xi_i\}$ が直交系のとき，すなわち $[\Psi'_i, \Psi'_j] = \delta_{ij} exp(2k\mathrm{Im}[c_i]t)$ のときは

$$|\Psi'|^2 = \sum_i |a_i|^2 |\Psi'_i|^2 = \sum_i |a_i|^2 exp(2k\mathrm{Im}[c_i]t) \tag{14}$$

ii. $\{\xi_i\}$ が直交系でないとき

$$\begin{aligned} |\Psi|^2 &= \sum_i |a_i|^2 |\Psi'_i|^2 + \sum_{i \neq j} [a_i \Psi'_i, a_j \Psi'_j] \\ &= \sum_i |a_i|^2 \exp(2k\mathrm{Im}[c_i]t) \\ &\quad + 2 \cdot \sum_{i \neq j} |a_i a_j^* [\xi_i, \xi_j]| \cdot \cos\{\theta t + \arg(a_i a_j [\xi_i, \xi_j])\} \\ &\quad \cdot \exp\{k(\mathrm{Im}[c_i] + \mathrm{Im}[c_j])t\} \end{aligned} \tag{15}$$

ただし $\theta = k(\mathrm{Re}[c_i] - \mathrm{Re}[c_j])$ である．

固有関数系が完全直交系である場合には，線型安定性の判定は容易である．(14) より，全ての固有値が $\mathrm{Im}[c] < 0$ であるときは，任意の擾乱のノルムが時間について指数関数的に減少することがわかる．このとき，基本場は線型安定である．同様に，全ての固有値が $\mathrm{Im}[c] \leq 0$ であるとき，任意の擾乱のノルムは時間的に増大しないので線型中立である．当然 $\mathrm{Im}[c] > 0$ である固有値が一つでも存在すれば線型不安定である．

ところが固有関数系が直交系でない場合には，(15) の右辺第 2 項を考慮しなければならない．これは $\mathrm{Im}[c] > 0$ の固有値が存在しないときに特に重要である．第 1 項が時間的に減少あるいは一定であるので第 2 項の振舞いにより線型安定性が判定されるからである．ところで，第 2 項の時間変化は初期擾乱の振幅の大きさだけでなく位相 $\arg(a_i a_j^* [\xi_i, \xi_j])$ に依存する．したがって，初期値の振幅をいかに小さくしても，擾乱の振幅が安定性の条件を破る程度に増大するように初期値の位相をうまく設定することができる可能性がある．したがって，固有関数系が直交系でないときは，全ての固有値が $\mathrm{Im}[c] < 0$ あるいは $\mathrm{Im}[c] \leq 0$ であっても線型安定・中立であると判定できない (Case,1960).

$\mathrm{Im}[c] > 0$ である固有値が存在するときは，線型安定性の判定に関して (15) 右辺第２項はあまり重要ではない．十分時間がたつとその固有関数が目だってきて第１項が大きくなるからである．このときは線型不安定であると判定できる．しかし，初期からその固有関数が目だってくるまでの時間では擾乱の構造がどのようになっているかは初期値問題として解いてみないとわからない．不安定固有関数に関係なく，一時的に擾乱のノルムが増大することもありうる．

固有値問題として扱うときの 2 次元平行シアー流の線型安定性の判定をまとめておく．

- $\mathrm{Im}[c] > 0$ である固有値 c が一つでも存在すれば線型不安定である
- 固有値 c がすべて $\mathrm{Im}[c] < 0$ であるからといって線型安定とはかぎらない
- 固有値 c がすべて $\mathrm{Im}[c] \leq 0$ であるからといって線型中立とはかぎらない

重要な注意として，世の中で用いられている２次元平行シアー流の線型安定性の定義は，われわれの定義とは異なることを指摘しておく．巷では，$\mathrm{Im}[c] > 0$ である固有値 c が存在するとき線型不安定，固有値 c がすべて $\mathrm{Im}[c] \leq 0$ のとき線型中立，固有値 c がすべて $\mathrm{Im}[c] < 0$ のとき線型安定，という定義をしばしば用いる (Lin,1955,p.1).

4 例 1． 初期値問題 (外力のない２次元等密度非粘性流体)

２次元等密度非粘性流体の平行流の線型安定性を初期値問題として扱う．基本場 $U(y)$ に対する線型擾乱方程式と境界条件は次の (16)〜(19) である（‘不安定の認識論’，例１）.

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{dU}{dy} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U\frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y}, \tag{18}$$

$$v' = 0, \quad at \quad y = y_1,\ y_2. \tag{19}$$

ただし $\rho = const.$ である．

(16) より，擾乱の流線関数 $\Psi'(x,y,t)$ を導入することができる．

$$u' = -\frac{\partial \Psi'}{\partial y}, \qquad v' = \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \tag{20}$$

(17),(18) より p' を消去して渦度方程式を導き，さらに (21) を用いると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\Psi' - \frac{d^2U}{dy^2}\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0. \tag{21}$$

境界条件は (19) より

$$\Psi' = 0, \quad \text{at} \quad y = y_1, y_2. \tag{22}$$

擾乱の流線関数を Fourier 変換して考える．$\psi(k,y,t)$ を $\Psi'(x,y,t)$ の Fourier 変換とする．

$$\Psi'(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(k,y,t)e^{ikx}dk, \tag{23}$$

$$\psi(k,y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi'(x,y,t)e^{-ikx}dx. \tag{24}$$

(23) を (21),(22) に代入して $\psi(k,y,t)$ についての微分方程式・境界条件を求める．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + ikU\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2\right)\psi - ik\frac{d^2U}{dy^2}\psi = 0, \tag{25}$$

$$\psi = 0, \quad \text{at} \quad y = y_1,\ y_2. \tag{26}$$

以下，前に説明した手順にしたがって解く．

1. Laplace 変換

   $\eta(k,y,s)$ を $\psi(k,y,t)$ の Laplace 変換とする．

$$\begin{aligned} \psi(k,y,t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty}\eta(k,y,s)e^{st}ds, \\ \eta(k,y,s) &= \int_0^{\infty}\psi(k,y,t)e^{-st}dt. \end{aligned} \tag{27}$$

   (25) ,(26) を Laplace 変換することにより $\eta(k,y,s)$ についての方程式が得られる．

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 - \frac{ik}{s+ikU(y)}\frac{d^2U}{dy^2}\right)\eta(k,y,s) = f(k,y), \tag{28}$$

$$\eta = 0, \quad \text{at} \quad y = y_1,\ y_2. \tag{29}$$

   ただし $f(k,y) = \dfrac{1}{s+ikU}\left(\dfrac{d^2}{dy^2} - k^2\right)\psi(k,y,0)$ である．

2. 擾乱の Laplace 変換を求める

(28) の一般解は次のように表わすことができる．

$$\eta = A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + \eta_s. \tag{30}$$

$\eta_i(k,y,s)$ $(i=1,2)$ は (28) の斉次方程式の二つの独立な解である．η_s は (29) の特解であり，η_i を用いて次のように計算される．

$$\eta_s = -\eta_1 \int \frac{f\eta_2}{W} dy + \eta_2 \int \frac{f\eta_1}{W} dy \tag{31}$$

ここで，W は Wronski 行列式であり，次のように定義される．

$$W = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \dfrac{d\eta_1}{dy} & \dfrac{d\eta_2}{dy} \end{vmatrix}$$

(28) の斉次方程式の場合，W は y に関して定数である．

(30) の係数 A_1, A_2 は境界条件により定められる．(30) を (29) に代入すると

$$\begin{pmatrix} \eta_1(y_1) & \eta_2(y_1) \\ \eta_1(y_2) & \eta_2(y_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_s(y_1) \\ \eta_s(y_2) \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \end{pmatrix}$$

ここで

$$\Delta = \begin{vmatrix} \eta_1(y_1) & \eta_2(y_1) \\ \eta_1(y_2) & \eta_2(y_2) \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_2(y_1)\eta_s(y_2) - \eta_2(y_2)\eta_s(y_1) \\ \eta_1(y_2)\eta_s(y_1) - \eta_1(y_1)\eta_s(y_2) \end{pmatrix}$$

よって擾乱の Laplace 変換は次のように求められる．

$$\eta = \frac{1}{\Delta}(A_1'\eta_1 + A_2'\eta_2) \tag{32}$$

3. 求めた $\eta(k,y,s)$ を逆 Laplace 変換する．

$$\psi(k,y,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty} \eta(k,y,s)e^{st} ds. \tag{33}$$

逆 Laplace 変換を実行するためにその積分路を変型するには複素 s 平面上での η の特異点を考慮しなければならない．s に関する η の特異点は，Δ の

零点と η_1, η_2, η_s の特異点（例えば $s + ikU(y) = 0$）である．逆変換の積分路を複素 s 平面上を左に移動させて，Δ の零点のまわりの一周積分とその他の特異点をまわる積分路に変型する（図３）．Δ の零点のまわりの積分（積分路を I_p とする）は留数定理を用いて計算することができる．

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{I_p} \eta(k,y,s)e^{st}ds = (a_{1p}\eta_{1p} + a_{2p}\eta_{2p})e^{s_p t}, \tag{34}$$

ただし $a_{ip} = \lim_{s\to s_p} \frac{A'_i}{\Delta}\cdot(s - s_p)$，$\eta_{ip} = \lim_{s\to s_p}\eta_i$ である．したがって，逆変換は次のように計算される．

$$\begin{aligned}\psi(k,y,t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} \eta(k,y,s)e^{st}ds \\ &= \sum_p (a_{1p}\eta_{1p} + a_{2p}\eta_{2p})e^{s_p t} + \int_c \eta(k,y,s)e^{st}ds.\end{aligned} \tag{35}$$

図 3. 逆 Laplace 変換の積分路の変形

4. 逆 Fourier 変換

$\psi(k,y,t)$ を逆 Fourier 変換する．

$$\Psi'(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(k,y,t)e^{ikx}dk.$$

5　例 2.　固有値問題 (外力のない２次元等密度非粘性流体)

2 次元等密度非粘性流体の平行流の線型安定性を固有値問題として扱う．その手順は前に説明したとおりである．

1. Fourier 変換

   擾乱の流線関数の Fourier 変換 $\psi(k,y,t)$ のしたがう方程式・境界条件は例１の (25),(26) である．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+ikU\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-k^2\right)\psi-ik\frac{d^2U}{dy^2}\psi=0, \tag{36}$$

$$\psi=0, \qquad \text{at} \quad y=y_1,\ y_2. \tag{37}$$

2. 時間空間の変数分離

   変数分離解を次のように仮定する．

$$\psi(k,y,t)=\xi(k,y)e^{-ikct} \tag{38}$$

   (38) を (36),(37) に代入して $\xi(k,y)$ に関する方程式・境界条件を求める．

$$\left(\frac{d^2}{dy^2}-k^2-\frac{1}{U(y)-c}\frac{d^2U}{dy^2}\right)\xi(k,y)=0, \tag{39}$$

$$\xi=0, \qquad \text{at} \quad y=y_1,\ y_2. \tag{40}$$

3. 固有値問題

   (39),(40) を c についての固有値問題として解く [1]．

6　例 3．固有値問題と初期値問題との対応関係

例１の初期値問題における積分変換に寄与する特異点と，例２の固有値問題における固有値・固有関数との対応関係を考える．

[1] c が実数の場合には，(40) は $U(y)-c=0$ なる点 y_c において特異点を持つ可能性がある．このとき特異点をどの様に扱えばよいか，われわれは判断材料を持たない．通常は，初期値問題の解として実現し得る，という条件（因果律）を新たに与えて解く．もちろん，c が虚数部を持つときには，(40) は y が実数の範囲で特異点を持たないので，安心して固有値問題として解くことができる．

例1において，逆 Laplace 変換を行うときに $\Delta = 0$ の特異点から計算される部分は (34) である．

$$(a_{1p}\eta_{1p} + a_{2p}\eta_{2p})e^{s_p t}, \tag{41}$$

ただし $a_{ip} = \lim_{s \to s_p} \frac{A'_i}{\Delta} \cdot (s - s_p)$，$\eta_{ip} = \lim_{s \to s_p} \eta_i$ である．

η_1, η_2 は固有値問題での微分方程式 (39) において $c \to -s/(ik)$ と置き換えた式の解であり，$a_{1p}\eta_{1p} + a_{2p}\eta_{2p}$ は境界条件 (40) を満たす．したがって $a_{1p}\eta_{1p} + a_{2p}\eta_{2p}$ は固有関数であり，固有値は $c = s_p/(ik)$ である．初期値問題における Laplace 変換の特異点 Δ は固有値問題における固有解に対応する．

しかし，特異点と固有解の対応がはっきりしているのは $\Delta = 0$ の場合だけである．初期値問題の解法を見れば，逆変換の積分への寄与は，$\Delta = 0$ からだけではなく他の特異点（極，分岐点）からの寄与があることがわかる．これらの特異点が固有解とどのように結びつくかは定かでない．逆に，$\Delta = 0$ に対応しない固有値・固有関数が初期値問題における特異点とどのように結びつくかも定かではない．

文献

Case,K.M., 1960 : Stability of inviscid plane Couette flow, *Phys. Fluids*, **3**, 143-148.

Lin,C.C., 1955 : The Theory of Hydrodynamic Instability. Cambridge University Press, 155p.

巽 友正, 後藤金英, 1976 : 流れの安定性理論，産業図書，275p.

新野 宏, 1981 : 順圧不安定の力学, 天気, **28**, 53-82.