成層シアー流の積分定理

支配方程式

$x-z$ 2次元非圧縮流体における支配方程式から出発する.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z} &= 0, & (1)\\
\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x}, & (2)\\
\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial z}-\rho g, & (3)\\
\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+w\frac{\partial \rho}{\partial z} &= 0, & (4)
\end{aligned}$$

境界として $z=z_1, z_2$ に壁がある場合を考える (図 1). 境界条件は

$$w=0 \qquad \text{at} \qquad z=z_1,\quad z_2 \qquad (5)$$

である.

図 1. 成層シアー流を考える状況

[0] /不安定/積分定理/Seisou1.tex, Seisoum.tex

基本場 $u=U(z),\quad w=0,\quad \rho=\varrho(z),\quad p=P(z)$ に対する線型擾乱方程式は

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0, \tag{6}$$

$$\varrho\left(\frac{\partial u'}{\partial t}+U\frac{\partial u'}{\partial x}+w'\frac{\partial U}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p'}{\partial x}, \tag{7}$$

$$\varrho\left(\frac{\partial w'}{\partial t}+U\frac{\partial w'}{\partial x}\right)=-\frac{\partial p'}{\partial z}-\rho' g, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t}+U\frac{\partial \rho'}{\partial x}+w'\frac{\partial \varrho}{\partial z}=0, \tag{9}$$

ダッシュ $(')$ は擾乱に関する量であることをあらわす. $-\frac{\partial}{\partial z}(7)+\frac{\partial}{\partial x}(8)$ と $(6),(9)$ を用いて 1 変数の式にすると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi-\frac{d^2U}{dz^2}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right.$$
$$\left.-\frac{N^2}{g}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi-\frac{dU}{dz}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right\}\right]+N^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0. \tag{10}$$

ただし, ψ' は擾乱の流線関数

$$u'=-\frac{\partial \psi}{\partial z},\quad w'=\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{11}$$

であり, N^2 は Brunt-Väisälä 振動数である.

$$N^2=\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dz} \tag{12}$$

æ

変数分離解

x, t を変数分離する．$\psi = \phi(z)e^{ik(x-ct)}$ とおくと (10) 式は

$$(U-c)\left\{(U-c)\left(\frac{d^2}{dz^2}-k^2\right)-\frac{d^2U}{dz^2}-\frac{N^2}{g}(U-c)\frac{d}{dz}+\frac{N^2}{g}\frac{dU}{dz}\right\}\phi+N^2\phi=0. \tag{13}$$

z 方向の変位 $\eta = F(z)e^{ik(x-ct)}$ を導入する．$w \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\eta$ であるから F と ϕ の関係は $\phi=(U-c)F$ となる．これを上式に代入して

$$\begin{aligned}
&(U-c)\left\{(U-c)\left(\frac{d^2}{dz^2}-k^2\right)(U-c)F-\frac{d^2U}{dz^2}(U-c)F\right.\\
&\quad\left.-\frac{N^2}{g}(U-c)\frac{d}{dz}(U-c)F+\frac{N^2}{g}\frac{dU}{dz}(U-c)F\right\}+N^2(U-c)F=0,\\
&(U-c)^2\frac{d^2F}{dz^2}+2(U-c)\frac{dU}{dz}\frac{dF}{dz}-k^2(U-c)^2F-\frac{N^2}{g}(U-c)^2\frac{dF}{dz}+N^2F=0,\\
&\varrho\frac{d}{dz}\left[(U-c)^2\frac{dF}{dz}\right]+\frac{d\varrho}{dz}(U-c)^2\frac{dF}{dz}-\rho\{k^2(U-c)^2-N^2\}F=0.
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{d}{dz}\left\{\varrho(U-c)^2\frac{dF}{dz}\right\}-\varrho\{k^2(U-c)^2-N^2\}F=0. \tag{14}$$

---

[0] /不安定/積分定理/Seisou2.tex, Seisoum.tex

変数変換

$F=(U-c)^{-n}H(z)$ と変数変換する[1]．(14) 式は

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dz}\left[\varrho(U-c)^2\frac{d}{dz}\{(U-c)^{-n}H\}\right]-\varrho\{k^2(U-c)^2-N^2\}(U-c)^{-n}H=0,\\
&\frac{d}{dz}\left\{\varrho(U-c)^{2-n}\frac{dH}{dz}\right\}-n\frac{d}{dz}\left\{\varrho(U-c)^{1-n}\frac{dU}{dz}H\right\}-\varrho\{k^2(U-c)^2-N^2\}(U-c)^{-n}H=0,\\
&\frac{d}{dz}\left\{\varrho(U-c)^{2-n}\frac{dH}{dz}\right\}-n\varrho(U-c)^{1-n}\frac{dU}{dz}\frac{dH}{dz}\\
&\quad-\left[n\frac{d}{dz}\left\{\varrho(U-c)^{1-n}\frac{dU}{dz}\right\}+\varrho\{k^2(U-c)^2-N^2\}(U-c)^{-n}\right]H=0.
\end{aligned}$$

各項に $(U-c)^{-n}$ をかけると

$$\begin{aligned}
(U-c)^{-n}\quad&\frac{d}{dz}\left\{\varrho(U-c)^{2-n}\frac{dH}{dz}\right\}+\frac{d}{dz}\{(U-c)^{-n}\}\varrho(U-c)^{2-n}\frac{dH}{dz}\\
&-\left[n(U-c)^{1-2n}\frac{d}{dz}\left(\varrho\frac{dU}{dz}\right)+n(1-n)(U-c)^{-2n}\varrho\left(\frac{dU}{dz}\right)^2\right.\\
&\qquad\left.+\varrho\{k^2(U-c)^2-N^2\}(U-c)^{-2n}\right]H=0.
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dz}\left\{\varrho(U-c)^{2(1-n)}\frac{dH}{dz}\right\}-\left[n(U-c)^{1-2n}\frac{d}{dz}\left(\varrho\frac{dU}{dz}\right)\right.\\
&\quad\left.+n(1-n)(U-c)^{-2n}\varrho\left(\frac{dU}{dz}\right)^2+\varrho\{k^2(U-c)^2-N^2\}(U-c)^{-2n}\right]H=0.
\end{aligned}\tag{15}$$

[1] ここから先は不安定解のみ考えることにする．すなわち $c_i>0$ であるから $U-c$ は常に 0 ではない．n が整数でないときはしかるべき branch を選ぶ．

領域積分

(15) 式に H^* をかけて z_1 から z_2 まで積分する． 部分積分を実行し，境界条件 $H = 0 \quad \mathrm{at} \ z = z_1, z_2$ を用いると

$$\int_{z_1}^{z_2}\left[\varrho(U-c)^{2(1-n)}\left|\frac{dH}{dz}\right|^2 + \left\{n(U-c)^{1-2n}\frac{d}{dz}\left(\varrho\frac{dU}{dz}\right)\right.\right. \tag{16}$$

$$\left.\left.+n(1-n)(U-c)^{-2n}\varrho\left(\frac{dU}{dz}\right)^2 + \varrho\{k^2(U-c)^2-N^2\}(U-c)^{-2n}\right\}|H|^2\right]dz = 0.$$

æ

Miles-Howard の定理

(15) において $n = \dfrac{1}{2}$ とすると

$$\int_{z_1}^{z_2} \left[\varrho(U-c)\left|\frac{dH}{dz}\right|^2 + \left\{ \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(\varrho\frac{dU}{dz}\right) + \frac{1}{4}(U-c)^{-1}\varrho\left(\frac{dU}{dz}\right)^2 \right.\right.$$
$$\left.\left. +\varrho\{k^2(U-c)^2 - N^2\}(U-c)^{-1} \right\} |H|^2 \right] dz = 0.$$

虚数部を取り出すと

$$-c_i \int_{z_1}^{z_2} \left[\varrho\left|\frac{dH}{dz}\right|^2 + \left\{ -\frac{1}{|U-c|^2}\varrho\left(\frac{dU}{dz}\right)^2 \varrho k^2 + \frac{\varrho N^2}{|U-c|^{-2}} \right\} |H|^2 \right] dz = 0,$$

すなわち,

$$c_i \int_{z_1}^{z_2} \varrho \left[\left|\frac{dH}{dz}\right|^2 + k^2|H|^2 + \left\{ N^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{dU}{dz}\right)^2 \right\} |\frac{H}{U-c}|^2 \right] dz = 0. \tag{17}$$

流体の占める全領域で $N^2 - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{dU}{dz}\right)^2 > 0$ のとき積分は正定値となるので $c_i = 0$ である. このとき流れは安定である.

Richardson Number $Ri \equiv \dfrac{N^2}{(dU/dz)^2}$ を用いれば,

安定であるための十分条件は, 流体全領域において

$$Ri \equiv \frac{N^2}{(dU/dz)^2} > \frac{1}{4} \tag{18}$$

が成り立つことである.

逆に,

[0] /不安定/積分定理/Seisou3.tex, Seisoum.tex

流れが不安定であるには, 流れのどこかで

$$Ri \equiv \frac{N^2}{(dU/dz)^2} \leq \frac{1}{4} \tag{19}$$

となる必要がある.

これを Miles-Howard の定理という (Miles,1961, Howard,1961).

(17) を更に変形して, 最大成長率を見積もることが出来る. 第 1 項と第 3 項を移項して

$$\begin{aligned}
k^2 \int_{z_1}^{z_2} \varrho |H|^2 dz &= \int_{z_1}^{z_2} \varrho \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 - N^2 \right\} \left| \frac{H}{U-c} \right|^2 dz - \int_{z_1}^{z_2} \left| \frac{dH}{dz} \right|^2 dz \\
&\leq \int_{z_1}^{z_2} \varrho \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 - N^2 \right\} \left| \frac{H}{U-c} \right|^2 dz \\
&\leq \max \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 - N^2 \right\} \int_{z_1}^{z_2} \varrho \left| \frac{H}{U-c} \right|^2 dz \\
&\leq \max \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 - N^2 \right\} \frac{1}{c_i^2} \int_{z_1}^{z_2} \varrho \left| \frac{H}{U} \right|^2 dz.
\end{aligned}$$

よって, 成長率 kc_i の最大値は

$$(kc_i)^2 \leq \max \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 - N^2 \right\} \tag{20}$$

となる. æ

Howard の半円定理

(16) において $n=0$ とする.

$$\int_{z_1}^{z_2}\left\{\varrho(U-c)^2\left|\frac{dH}{dz}\right|^2+\varrho\{k^2(U-c)^2-N^2\}|H|^2\right\}dz=0.$$

実数部と虚数部に分けると

$$\int_{z_1}^{z_2}\varrho\left[\{(U-c_r)^2+c_i^2\}\left\{\left|\frac{dH}{dz}\right|^2+k^2|H|^2\right\}-N^2|H|^2\right]dz=0,$$
$$c_i\int_{z_1}^{z_2}\varrho(U-c_r)\left\{\left|\frac{dH}{dz}\right|^2+k^2|H|^2\right\}dz=0.$$

$P\equiv\varrho\left\{\left|\frac{dH}{dz}\right|^2+k^2|H|^2\right\}$ とおく. 上の 2 式より

$$\int_{z_1}^{z_2}U^2Pdz=(c_r^2+c_i^2)\int_{z_1}^{z_2}Pdz,$$
$$\int_{z_1}^{z_2}UPdz=c_r\int_{z_1}^{z_2}Pdz.$$

$(U-U_{min})(U-U_{max})\le 0$ であることを用いると

$$\begin{aligned}
0 &\ge \int_{z_1}^{z_2}(U-U_{min})(U-U_{max})Pdz\\
&= \int_{z_1}^{z_2}\{U^2-(U_{min}+U_{max})U+U_{min}U_{max}\}Pdz\\
&= (c_r^2+c_i^2)\int_{z_1}^{z_2}Pdz+\int_{z_1}^{z_2}\varrho N^2|H|^2dz-(U_{min}+U_{max})c_r\int_{z_1}^{z_2}Pdz+U_{min}U_{max}\int_{z_1}^{z_2}Pdz\\
&= \int_{z_1}^{z_2}\varrho N^2|H|^2dz-\{(c_r^2+c_i^2)-(U_{min}+U_{max})c_r+U_{min}U_{max}\}\int_{z_1}^{z_2}Pdz\\
&= \int_{z_1}^{z_2}\varrho N^2|H|^2dz+\left\{\left(c_r-\frac{U_{min}+U_{max}}{2}\right)^2+c_i^2-\frac{(U_{max}-U_{min})^2}{4}\right\}\int_{z_1}^{z_2}Pdz \qquad (21)\\
&\ge \left\{\left(c_r-\frac{U_{min}+U_{max}}{2}\right)^2+c_i^2-\frac{(U_{max}-U_{min})^2}{4}\right\}\int_{z_1}^{z_2}Pdz
\end{aligned}$$

$\int_{z_1}^{z_2}Pdz>0$ であるから

[0] /不安定/積分定理/Seisou4.tex, Seisoum.tex

$$\left(c_r - \frac{U_{min}+U_{max}}{2}\right)^2 + c_i^2 \le \frac{(U_{max}-U_{min})^2}{4} \tag{22}$$

複素 c 平面上での位相速度の存在範囲は図 2 の半円内になる．これを Howard の半円定理という (Howard,1961).

図 2. Howard の半円定理

c_i の存在領域は, この定理の拡張である Howard-Kocher-Jain の半楕円定理によってさらに狭めることができる (後述). æ

Rayleigh の定理の成層流への拡張

(16) において $n=1$ とすると

$$\int_{z_1}^{z_2}\left[\varrho\left|\frac{dH}{dz}\right|^2+\left\{(U-c)^{-1}\frac{d}{dz}\left(\varrho\frac{dU}{dz}\right)+\varrho\{k^2(U-c)^2-N^2\}(U-c)^{-2}\right\}|H|^2\right]dz=0. \tag{23}$$

虚数部だけ取り出すと

$$c_i\int_{z_1}^{z_2}\left\{\frac{-1}{|U-c|^2}\frac{d}{dz}\left(\varrho\frac{dU}{dz}\right)+\frac{2(U-c_r)}{|U-c|^4}\varrho N^2\right\}|H|^2dz=0,$$

すなわち,

$$c_i\int_{z_1}^{z_2}\left\{\frac{d}{dz}\left(\varrho\frac{dU}{dz}\right)-\frac{2(U-c_r)}{|U-c|^2}\varrho N^2\right\}\left|\frac{H}{U-c}\right|^2dz=0.$$

$c_i\neq 0$ であるためには積分が 0 でなければならない. そのためには被積分関数がすくなくとも 1 回符号を変えなければならない.

よって

不安定であるためには, 流れのどこかで

$$\frac{d}{dz}\left(\varrho\frac{dU}{dz}\right)-\frac{2(U-c_r)}{|U-c|^2}\varrho N^2 \tag{24}$$

が符号を変える必要がある (Synge,1933).

特に, $\varrho=const.$, $g\longrightarrow 0$ の極限を考えると Rayleigh の変曲点定理に一致する. æ

[0] /不安定/積分定理/Seisou5.tex, Seisoum.tex

Howard-Kocher-Jain の半楕円定理

Howard の半円定理の拡張である半楕円定理を導く.

Howard の半円定理を導く途中の不等式 (21) から出発する.

$$\int_{z_1}^{z_2} \varrho N^2 |H|^2 dz + \left\{ \left(c_r - \frac{U_{min}+U_{max}}{2} \right)^2 + c_i^2 - \frac{(U_{max}-U_{min})^2}{4} \right\} \int_{z_1}^{z_2} P dz \leq 0. \qquad (25)$$

ただし $P \equiv \varrho \left\{ \left| \frac{dH}{dz} \right|^2 + k^2 |H|^2 \right\}$ である. (25) において第 1 項目を無視すれば Howard の半円定理が導かれる. ここでは Miles-Howard の定理を導く式を用いて第 1 項目の大きさを見積もることを行う. (17) より

$$\int_{z_1}^{z_2} \varrho \left(\left| \frac{dH}{dz} \right|^2 + k^2 |H|^2 \right) dz = \int_{z_1}^{z_2} \varrho \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 - N^2 \right\} |\frac{H}{U-c}|^2 dz. \qquad (26)$$

一方, $H = (U-c)^{\frac{1}{2}} F$ より

$$\begin{aligned}
\left| \frac{dH}{dz} \right|^2 &= \left| (U-c)^{\frac{1}{2}} \frac{dF}{dz} + \frac{1}{2(U-c)^{\frac{1}{2}}} \frac{dU}{dz} F \right|^2 \\
&\geq |U-c| \left| \frac{dF}{dz} \right|^2 + \frac{1}{4|U-c|} \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 |F|^2 - \left| \frac{dU}{dz} \right| \left| \frac{dF}{dz} \right| |F|
\end{aligned}$$

これを (26) に代入し, H を F に書き換えると

$$\begin{aligned}
&\int_{z_1}^{z_2} \varrho |U-c| \left| \frac{dF}{dz} \right|^2 dz + \int_{z_1}^{z_2} \frac{\varrho}{4|U-c|} \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 |F|^2 dz - \int_{z_1}^{z_2} \varrho \left| \frac{dU}{dz} \right| \left| \frac{dF}{dz} \right| |F| dz \\
&\quad + \int_{z_1}^{z_2} \varrho k^2 |U-c| |F|^2 dz \leq \int_{z_1}^{z_2} \frac{\varrho}{4|U-c|} \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 |F|^2 dz - \int_{z_1}^{z_2} \frac{N^2}{(dU/dz)^2} \frac{\varrho}{|U-c|} \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 |F|^2 dz
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
B^2 &\equiv \int_{z_1}^{z_2} \frac{\varrho}{|U-c|} \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 |F|^2 dz \\
D^2 &\equiv \int_{z_1}^{z_2} \varrho |U-c| |F|^2 dz \\
E^2 &\equiv \int_{z_1}^{z_2} \varrho |U-c| \left| \frac{dF}{dz} \right|^2 dz
\end{aligned}$$

[1] /不安定/積分定理/Seisou6.tex, Seisoum.tex

と置き換える.

$$
\begin{aligned}
&E^2 + B^2 - \int_{z_1}^{z_2} \varrho \left|\frac{dU}{dz}\right|\left|\frac{dF}{dz}\right| |F| dz + k^2 D^2 \\
&\le B^2 - \int_{z_1}^{z_2} \frac{N^2}{(dU/dz)^2} \frac{\varrho}{|U-c|} \left(\frac{dU}{dz}\right)^2 |F|^2 dz \\
&\le B^2 - \min\left[\frac{N^2}{(dU/dz)^2}\right] \int_{z_1}^{z_2} \frac{\varrho}{|U-c|} \left(\frac{dU}{dz}\right)^2 |F|^2 dz \\
&= (1 - 4Ri_0) B^2,
\end{aligned}
\tag{27}
$$

ただし $Ri_0 \equiv \min\left[\dfrac{N^2}{(dU/dz)^2}\right]$ である. さらに, Cauchy-Bunjakowski-Schwartz の不等式[2]より

$$
\begin{aligned}
\int_{z_1}^{z_2} \varrho \left|\frac{dU}{dz}\right|\left|\frac{dF}{dz}\right| |F| dz &\le \left[\int \frac{\varrho}{|U-c|}\left(\frac{dU}{dz}\right)^2 |F|^2 dz \int \varrho |U-c| \left|\frac{dF}{dz}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= (4B^2E^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2BE
\end{aligned}
$$

よって (27) は

$$
\begin{aligned}
E^2 + B^2 - 2BE + k^2 D^2 &\le (1 - 4Ri_0) B^2, \\
E^2 - 2BE + k^2 D^2 + 4Ri_0 B^2 &\le 0,
\end{aligned}
\tag{28}
$$

E について解くと

$$
B - \sqrt{B^2 - 4Ri_0 B^2 - k^2 D^2} \le E \le B + \sqrt{B^2 - 4Ri_0 B^2 - k^2 D^2}.
$$

再度 (28) を用いて

$$
\begin{aligned}
E^2 + k^2 D^2 &\le 2BE - 4Ri_0 B^2 \\
&\le 2B(B + \sqrt{B^2 - 4Ri_0 B^2 - k^2 D^2}) - 4Ri_0 B^2 \\
&\le 2B^2(1 + \sqrt{1 - 4Ri_0 - k^2 D^2/B^2}) - 4Ri_0 B^2.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

D^2/B^2 を見積もる. $|U-c| \ge c_i \ge 0$ より

[2] $\left[\int fg\right]^2 \ge \int f^2 \int g^2$

$$
\begin{aligned}
\frac{D^2}{B^2} &= \frac{\int_{z_1}^{z_2} \varrho |U-c||F|^2 dz}{\int_{z_1}^{z_2} \frac{\varrho}{|U-c|}\left(\frac{dU}{dz}\right)^2 |F|^2 dz} \\
&\geq \frac{c_i \int \varrho |F|^2 dz}{\frac{1}{4c_i}\max\left(\frac{dU}{dz}\right)^2 \int \varrho |F|^2 dz} = \frac{4c_i}{\max\left(\frac{dU}{dz}\right)^2}.
\end{aligned}
$$

また, 同様にして

$$
\begin{aligned}
E^2 + k^2 D^2 &= \int_{z_1}^{z_2} \varrho |U-c| \left|\frac{dF}{dz}\right|^2 dz + k^2 \int_{z_1}^{z_2} \varrho |U-c||F|^2 dz \\
&\geq c_i \int_{z_1}^{z_2} \left(\varrho \left|\frac{dF}{dz}\right|^2 + \varrho k^2 |F|^2\right) dz, \\
B^2 &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{\varrho}{|U-c|}\left(\frac{dU}{dz}\right)^2 |F|^2 dz \leq \frac{1}{4c_i}\int_{z_1}^{z_2} \varrho \frac{dU}{dz}|F|^2 dz.
\end{aligned}
$$

これらを (29) に代入すると

$$
\begin{aligned}
& c_i \int_{z_1}^{z_2} \left(\varrho \left|\frac{dF}{dz}\right|^2 + \varrho k^2 |F|^2\right) dz \\
& \quad \leq \frac{2}{4c_i}\left(1 - 2Ri_0 + \sqrt{1 - 4Ri_0 - \frac{4k^2 c_i^2}{\max(\frac{dU}{dz})^2}}\right) \int \varrho \frac{dU}{dz}|F|^2 dz,
\end{aligned}
$$

よって

$$
\int \varrho \frac{dU}{dz}|F|^2 dz \geq \frac{2c_i^2}{1 - 2Ri_0 + \sqrt{1 - 4Ri_0 - \frac{4k^2 c_i^2}{\max(\frac{dU}{dz})^2}}} \int_{z_1}^{z_2} \left(\varrho \left|\frac{dF}{dz}\right|^2 + \varrho k^2 |F|^2\right) dz. \qquad (30)
$$

さて, (25) 左辺第 2 項を見積もる.

$$
\int_{z_1}^{z_2} \varrho N^2 |F|^2 dz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{N^2}{(\frac{dU}{dz})^2} \varrho \left(\frac{dU}{dz}\right)^2 |F|^2 dz \leq Ri_0 \int_{z_1}^{z_2} \varrho \left(\frac{dU}{dz}\right)^2 |F|^2 dz \qquad (31)
$$

より (30), (31) を (25) に代入して

$$\left\{\left(c_r - \frac{U_{min}+U_{max}}{2}\right)^2 + c_i^2 - \frac{(U_{max}-U_{min})^2}{4} + \frac{2Ri_0}{1-2Ri_0+\sqrt{1-4Ri_0-\frac{4k^2c_i^2}{\max(\frac{dU}{dz})^2}}}c_i^2\right\}$$
$$\times\int_{z_1}^{z_2}\left(\varrho\left|\frac{dF}{dz}\right|^2+\varrho k^2|F|^2\right)dz. \leq 0.$$

よって

$$\boxed{\left(c_r - \frac{U_{min}+U_{max}}{2}\right)^2 + \left(1+\frac{2Ri_0}{1-2Ri_0+\sqrt{1-4Ri_0-\frac{4k^2c_i^2}{\max(\frac{dU}{dz})^2}}}\right)c_i^2 \leq \frac{(U_{max}-U_{min})^2}{4}. \qquad (32)}$$

これが Generalized Howard-Kocher-Jain Theorem である (Yu and Yu, 1984).

特に $k=0$ のとき, あるいは (28) において k^2D^2 を無視して同じ手順を経ることにより

$$\left(c_r - \frac{U_{min}+U_{max}}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{2Ri_0}{1-2Ri_0+\sqrt{1-4Ri_0}}\right)c_i^2 \le \frac{(U_{max}-U_{min})^2}{4}.$$

c_i^2 の係数を整理すると

$$\boxed{\left(c_r - \frac{U_{min}+U_{max}}{2}\right)^2 + \frac{2}{1+\sqrt{1-4Ri_0}}c_i^2 \le \frac{(U_{max}-U_{min})^2}{4}.} \qquad (33)$$

複素 c 平面上での位相速度の存在範囲は図 3 の半楕円内になる. これが Howard-Kocher-Jain の半楕円定理である (Kocher and Jain, 1979).

特に $Ri_0 = 0$ のとき Howard の半円定理に一致する.

図 3. Howard-Kocher-Jain の半楕円定理

æ

参考文献

Howard,L.N.,1961 : Note on a paper of John W.Miles. *J.Fluid Mech.*, **10**, 509-512

Kochar,G.T.,Jain,R.K.,1979 : Note on Howard's semicircle theorem. *J.Fluid Mech.*, **91**, 489-491

Miles,J.W.,1961 : On the stability of heterogeneous shear flows. *J.Fluid Mech.*, **10**, 496-508

Synge,J.L.,1933 : The stability of heterogeneous liquids. *Trans.Roy.Soc.Can.Sec.3*, **27**, 1-18

Yu.N.Makov,Yu.A.Stepanyants,1984 : Note on the paper of Kochar & Jain on Howard's semicircle theorem. *J.Fluid Mech.*, **140**, 1-10

巽友正, 後藤金英, 1976 : 流れの安定性理論. 産業図書, 275p.

æ

[0] /不安定/積分定理/Seisour.tex, Seisoum.tex