Rayleigh-Fjørtoft の定理

Rayleigh equation

β 平面における 2 次元非圧縮流体の線型化したポテンシャル渦度保存則から出発する．基本場 $u = U(y)$ に対して線型化した式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi + \frac{dQ}{dy}\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

ψ は擾乱の流線関数, $\dfrac{dQ}{dy}$ は基本場のポテンシャル渦度の勾配 $\dfrac{dQ}{dy} = \beta - \dfrac{d^2U}{dy^2}$ である．

$\psi = \phi(y)e^{ik(x-ct)}$ の型の解について調べる．(1) に代入して ik で割ると

$$(U - c)\left(\frac{d^2\phi}{dy^2} - k^2\phi\right) + \frac{dQ}{dy}\phi = 0. \tag{2}$$

特に $\beta = 0$ の場合,

$$(U - c)\left(\frac{d^2\phi}{dy^2} - k^2\phi\right) - \frac{d^2U}{dy^2}\phi = 0. \tag{3}$$

(3) を Rayleigh equation という．
æ

[0] 不安定/積分定理/Rylthrm1.tex,Rylthrm.tex

Rayleigh-Kuo の定理

(2) について, 境界条件

$$\phi = 0 \quad at \qquad y = y_1, y_2 \tag{4}$$

の下で考える[1]．(2) より

$$\frac{d^2\phi}{dy^2} + \left\{ \frac{dQ}{dy}\frac{1}{U-c} - k^2 \right\} \phi = 0. \tag{5}$$

ϕ^* をかけて y_1 から y_2 まで積分すると

$$\int_{y_1}^{y_2} \phi^* \frac{d^2\phi}{dy^2} dy + \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \frac{dQ}{dy}\frac{1}{U-c} - k^2 \right\} |\phi|^2 dy = 0.$$

第 1 項について部分積分を行うと

$$\int_{y_1}^{y_2} \left[\left| \frac{d\phi}{dy} \right|^2 + \left\{ k^2 - \frac{dQ}{dy}\frac{1}{U-c} \right\} |\phi|^2 \right] dy - \left[\phi^* \frac{d\phi}{dy} \right]_{y_1}^{y_2} = 0. \tag{6}$$

境界条件 (4) より, 第 2 項は 0 である. (6) の虚数部を取り出すと

$$c_i \int_{y_1}^{y_2} \frac{dQ}{dy}\frac{1}{|U-c|^2} |\phi|^2 dy = 0. \tag{7}$$

(7) において $c_i > 0$ の解が存在するためには

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{dQ}{dy}\frac{1}{|U-c|^2} |\phi|^2 dy = 0. \tag{8}$$

となる必要がある．そのためには, $y_1 < y < y_2$ において $\dfrac{dQ}{dy}$ が符号を変えなければならない.

流れが不安定である ($c_i > 0$ の解が存在する) ためには, 流れのどこかで基本場の渦度が極値を持つ必要がある．

$$\exists y_s, y_1 < y < y_2 \quad \left.\frac{dQ}{dy}\right|_{y=y_s} \equiv \left[\beta - \frac{d^2U}{dy^2} \right]_{y=ys} = 0. \tag{9}$$

[0] 不安定/積分定理/Rylthrm2.tex,Rylthrmm.tex
[1] これは boundary において $v = 0$ であることに対応する. この条件に限らず (6) 式において第 2 項が 0 になれば同様の議論が成り立つ.

これが Kuo の定理である (Kuo,1949).

特に $\beta = 0$ のときには

流れが不安定である ($c_i > 0$ の解が存在する) ためには, 基本場の流れは変曲点を持たねばならない.

$$\exists y_s, y_1 < y < y_2 \quad \left.\frac{d^2U}{dy^2}\right|_{y=y_s} = 0. \tag{10}$$

これが Rayleigh の変曲点定理である (Rayleigh,1880). æ

Fjørtoft の定理

簡単のため $U=U(y)$ が y について単調で, かつ, 変曲点 $y=y_s$ $\left(\left.\frac{dQ}{dy}\right|_{y_s}=0\right)$ がただ一つしかない流れに限定しよう. (6) の実数部から

$$\int_{y_1}^{y_2}\left[\left|\frac{d\phi}{dy}\right|^2+\left\{k^2-\frac{dQ}{dy}\frac{U-c_r}{|U-c|^2}\right\}|\phi|^2\right]dy=0. \tag{11}$$

したがって

$$\int_{y_1}^{y_2}\frac{dQ}{dy}\frac{(U-c_r)}{|U-c|^2}|\phi|^2dy>0 \tag{12}$$

$c_i>0$ の解について成り立つべき式である (8) に $c_r-U(y_s)$ をかけて (12) に加えると

$$\int_{y_1}^{y_2}\frac{dQ}{dy}\{U-U(y_s)\}|U-c|^2|\phi|^2dy>0 \tag{13}$$

$\frac{dQ}{dy}\{U-U(y_s)\}$ は $y=y_s$ を除いて定符号であるから, (13) 式が成立するためには

$$\frac{dQ}{dy}\{U-U(y_s)\}>0 \tag{14}$$

でなければならない. y_s の近傍で (14) 式を展開して

$$\left.\frac{d^2Q}{dy^2}\right|_{y_s}\cdot\left.\frac{dU}{dy}\right|_{y_s}(y-y_s)^2>0 \tag{15}$$

流れが不安定である ($c_i>0$ の解が存在する) ためには, 変曲点 $y=y_s$ $\left(\left.\frac{dQ}{dy}\right|_{y_s}=0\right)$ において

$$\frac{d^2Q}{dy^2}\frac{dU}{dy}>0 \quad at \quad y=y_s \tag{16}$$

となる必要がある.

特に, $\beta=0$ の場合には

[0] /不安定/積分定理/Rylthrm3.tex,Rylthrmm.tex

流れが不安定である ($c_i > 0$ の解が存在する) ためには, 変曲点 $y = y_s$ $\left(\left.\dfrac{d^2U}{dy^2}\right|_{y_s} = 0 \right)$ において

$$\frac{d^3U}{dy^3}\frac{dU}{dy} < 0 \quad at \quad y = y_s \tag{17}$$

となる必要がある.

さらに, 上の不安定であるための必要条件は

$$\frac{dU}{dy} > 0, \qquad \frac{d^3U}{dy^3} < 0 \longrightarrow \frac{dU}{dy} \text{ 極大 (図 1(a))} \tag{18}$$

$$\frac{dU}{dy} < 0, \qquad \frac{d^3U}{dy^3} > 0 \longrightarrow \frac{dU}{dy} \text{ 極小 (図 1(b))} \tag{19}$$

(a) U が単調増加　　(b) U が単調減少

図 1. Fjørtoft の定理の条件を満たす単調な流れ

である. したがって

不安定であるには流れのある場所 $y = y_s$ で渦度の絶対値 $\left| -\dfrac{dU}{dy} \right|$ が極大でないといけない.

これを Fjørtoft の定理という.

(a) 変曲点がないので安定　(b) 変曲点があるが安定　(c) 不安定であってよい

図 2. Raylegh - Fjørtoft の定理の例 ($\beta = 0$)

æ

参考文献

Rayleigh,Lord,1880 : On the stability or instability of certain fluid motions. *Proc. Lond. Math. Soc.*,**11**,57-70

Kuo,H.L.,1949 : Dynamic instability of two-dimensional nondivergent flow in a barotropic atmosphere. *J.Met.*,**6**,105-122

巽 友正, 後藤金英, 1976 : 流れの安定性理論, 産業図書, 275p.

新野 宏, 1981 : 順圧不安定の力学, 天気, **28**, 53-82.

æ

[0] /不安定/積分定理/RylthrmR.tex,Rylthrmm.tex