Alfvén波の固有モード

～　単純かと思いきや、ちょっと困った　～

九州大学大学院　理学府　地球惑星科学専攻
地球内部ダイナミクス研究室
修士課程2年
中島 涼輔(ナカシマ リョウスケ)（※ナカジマではない）

GFDセミナー初参加なので、まず**自己紹介**

研究テーマ

B4～M1の夏　　回転系の電磁流体の遅い波
（安定成層あり）
MAC波

M1の秋～M2の春　　地磁気データを
ちょっと解析

M2の春～　　この研究を再開中

GFDセミナー初参加なので、まず**自己紹介**

研究テーマ

回転系の電磁流体の遅い波
（安定成層あり）

MAC波

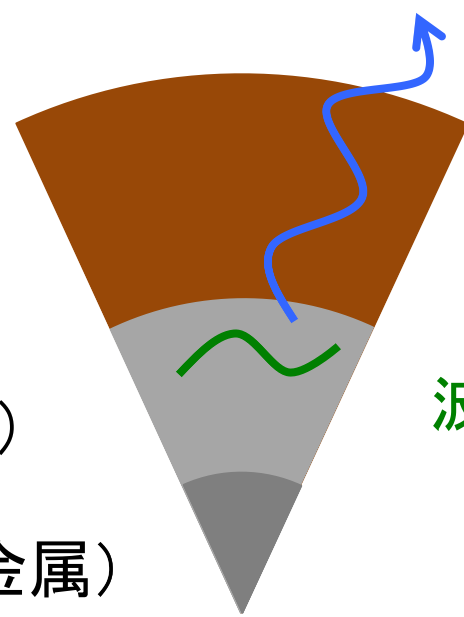
この研究をする目的？

研究の目的

回転系？　電磁流体？　波？

↓

地球磁場の変動(数年～数十年？スケール)は
地球の外核の中の波が見えている？



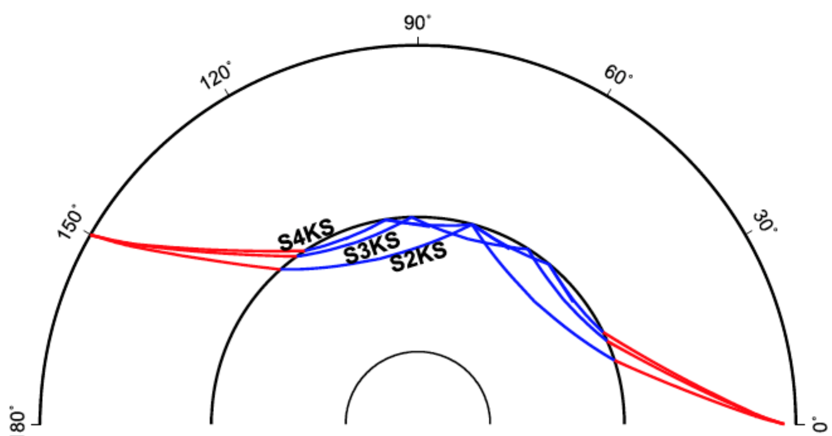
研究の目的

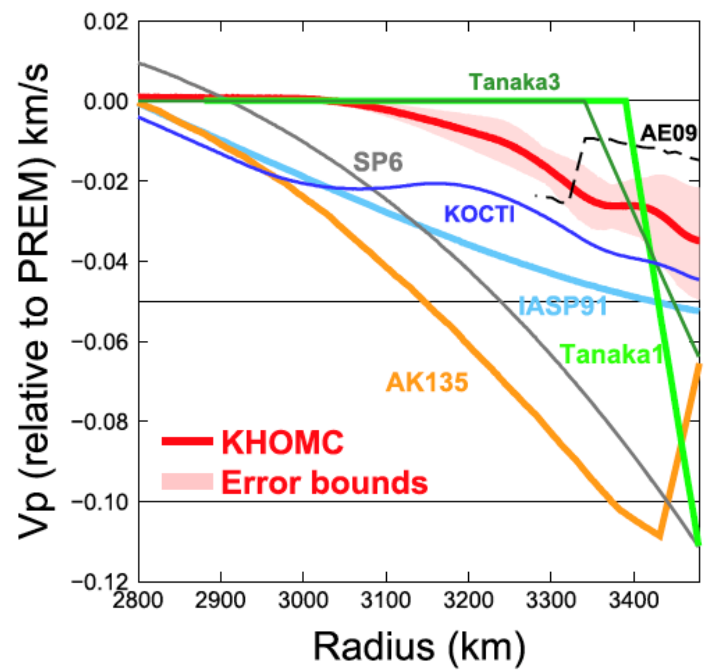
安定成層？

↑

地球の外核の一番上のところに

地震波速度が違うところがある





Kaneshima & Matsuzawa(2015)より

自己紹介ここまで

今日の話

ついに最近、

回転も密度変化も何もない、
ただの電磁流体の波（Alfvén波）
（しかも、簡単な場合）を考えていたら、
なんだかよく分からない結果になった

物理的意味？
数学的意味？
どこかで間違った処理をした？

Alfvén波とは？（テキトーな説明）

MHD近似という近似が使えるとき、

ローレンツ力（ Maxwell応力テンソル ）は、

圧力っぽい部分（磁気圧）
と
張力っぽい部分（磁気張力）

に分解できる。

張力 → 磁力線はゴムひもみたい

このゴムひもの振動 → Alfvén波

Alfvén波

一様な背景磁場 **B** =(B_x, B_y, B_z)がある、
無限領域での非散逸なAlfvén波の分散関係

$$\omega = \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{k}}{\sqrt{\rho\mu}}$$

ω	:周波数
k = (k_x, k_y, k_z)	:波数ベクトル
ρ	:密度
μ	:透磁率

※

弦を伝わる波の速さ

$$v = \sqrt{\frac{S}{\rho}}$$

S : 張力
ρ : 線密度

ここから本題

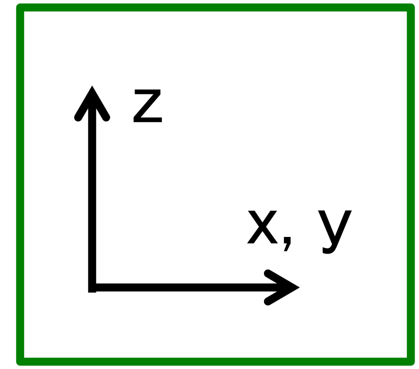
考える系

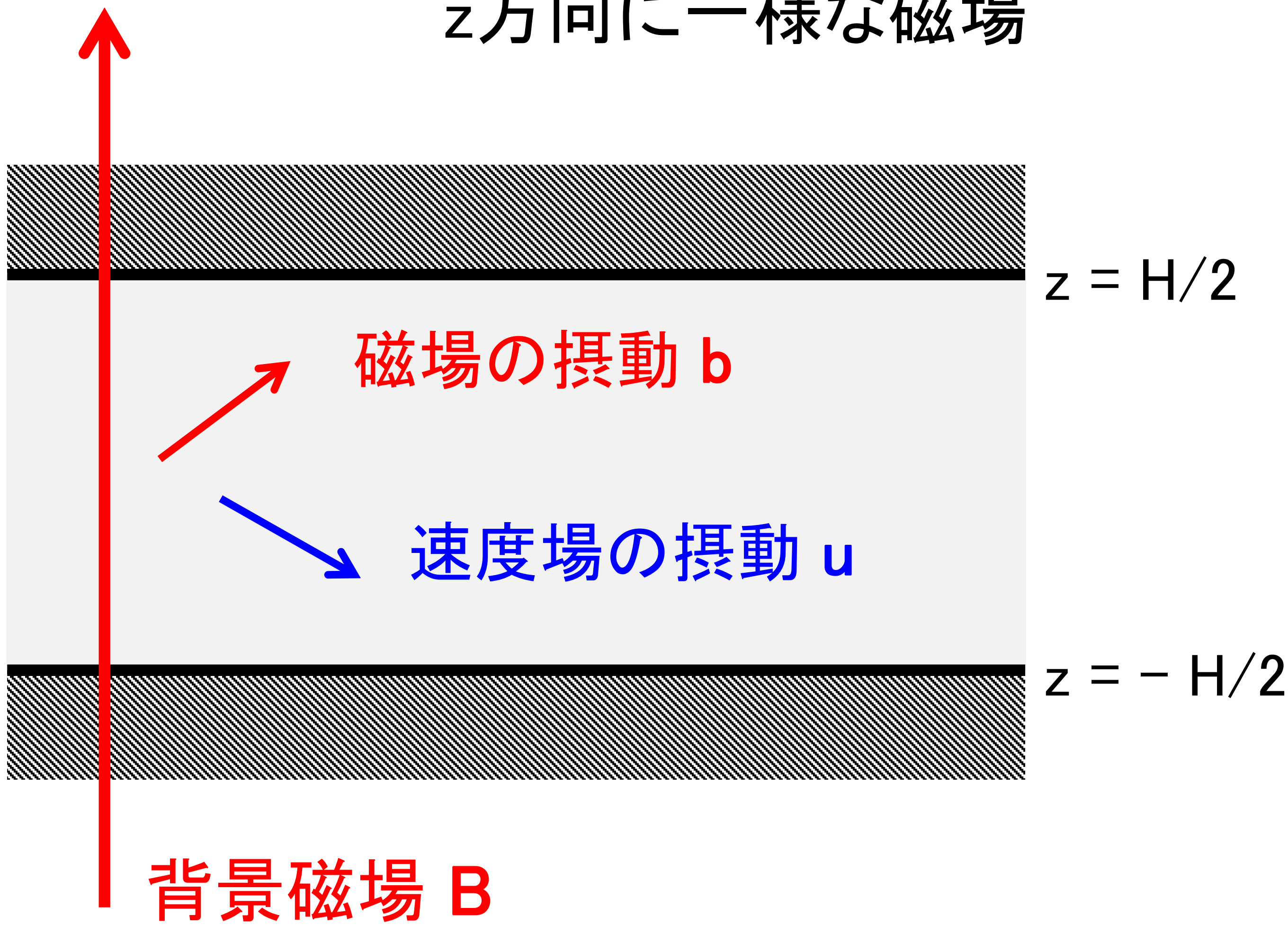
無限平板に、はさまれた流体を考える

密度一様・非粘性

流体も壁も、完全導体

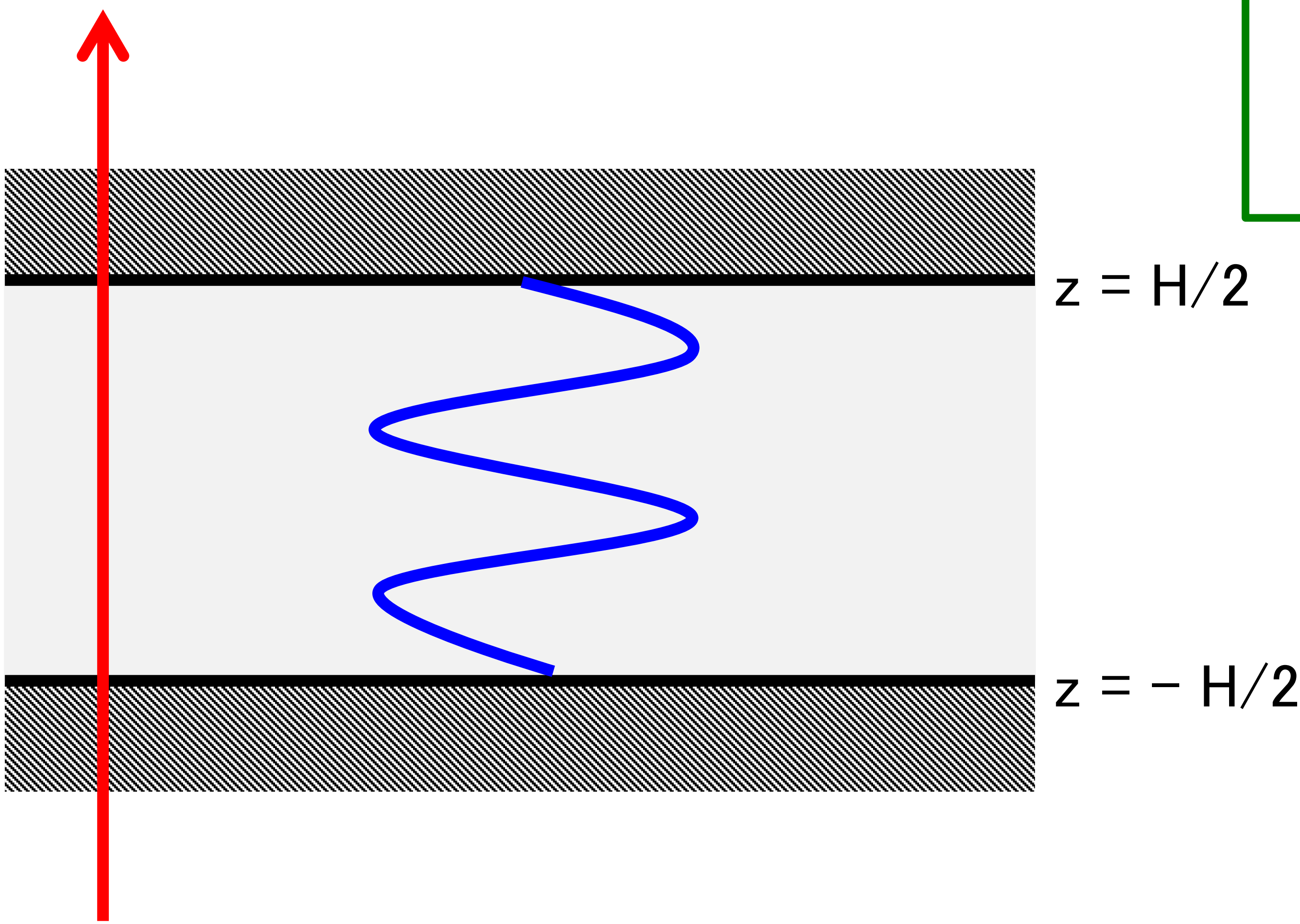
z方向に一様な磁場

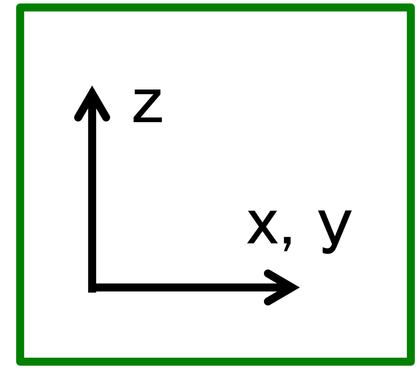




一番簡単なAlfvén波のイメージ

$k_x, k_y = 0$





基礎方程式

B：背景磁場
u：速度場の摂動
b：磁場の摂動
ρ：密度
μ：透磁率
p：圧力

線形化

運動方程式（非粘性）　　　磁気圧　　　磁気張力

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\left(p + \frac{Bb_z}{\mu}\right) + \frac{B}{\mu}\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial z}$$

誘導方程式（ 非散逸（ 電気伝導度 → ∞ ））

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t} = B\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}$$

連続の式（非圧縮）、磁場に関するガウスの法則

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{b} = 0$$

水平方向には、波型の解を仮定
鉛直モードを求める。

$$\begin{pmatrix} \zeta_z(x,y,z,t) \\ j_z(x,y,z,t) \\ u_z(x,y,z,t) \\ b_z(x,y,z,t) \end{pmatrix} = \Re\left[\begin{pmatrix} Z(z) \\ J(z) \\ W(z) \\ M(z) \end{pmatrix} e^{i(k_x x + k_y y)} e^{-i\omega t} \right]$$

z方向の単位ベクトル

速度の z 成分　$u_z = \boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z$

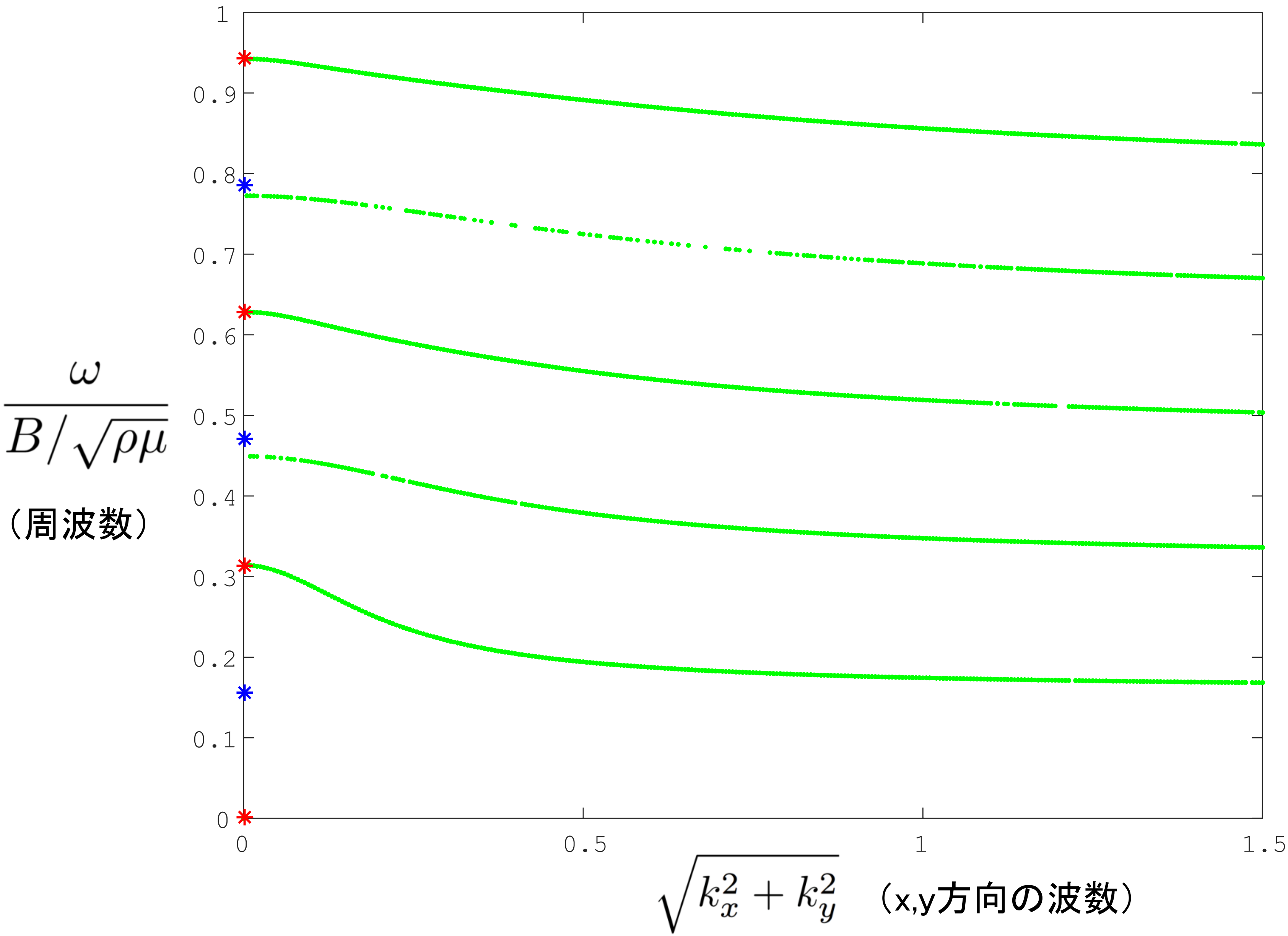
渦度の z 成分　$\zeta_z = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z$

磁場の z 成分　$b_z = \boldsymbol{b} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z$

電流の z 成分　$j_z = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{b}) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z$

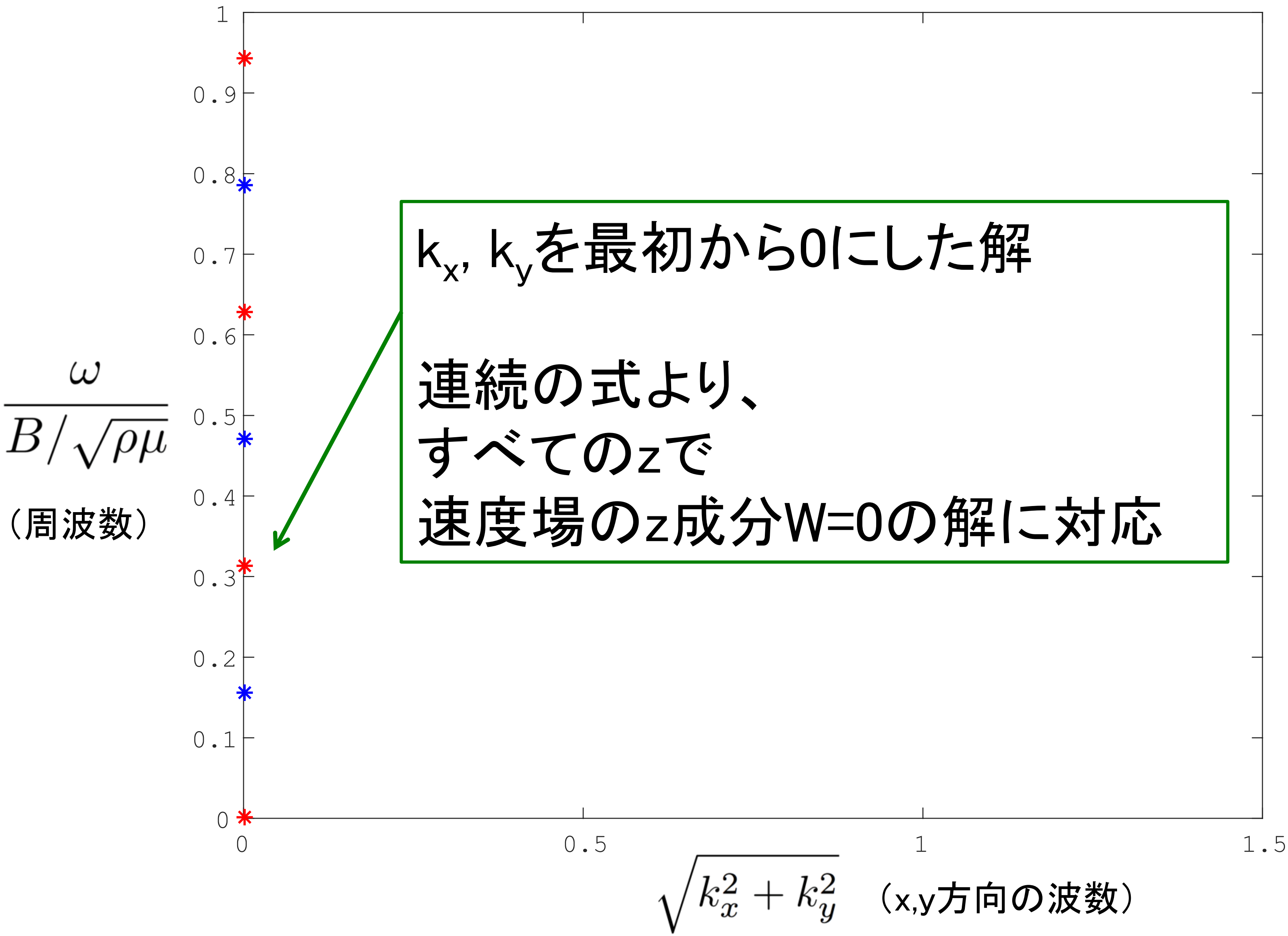
結果(分散関係)

(層の厚さH = 20)



結果(分散関係)

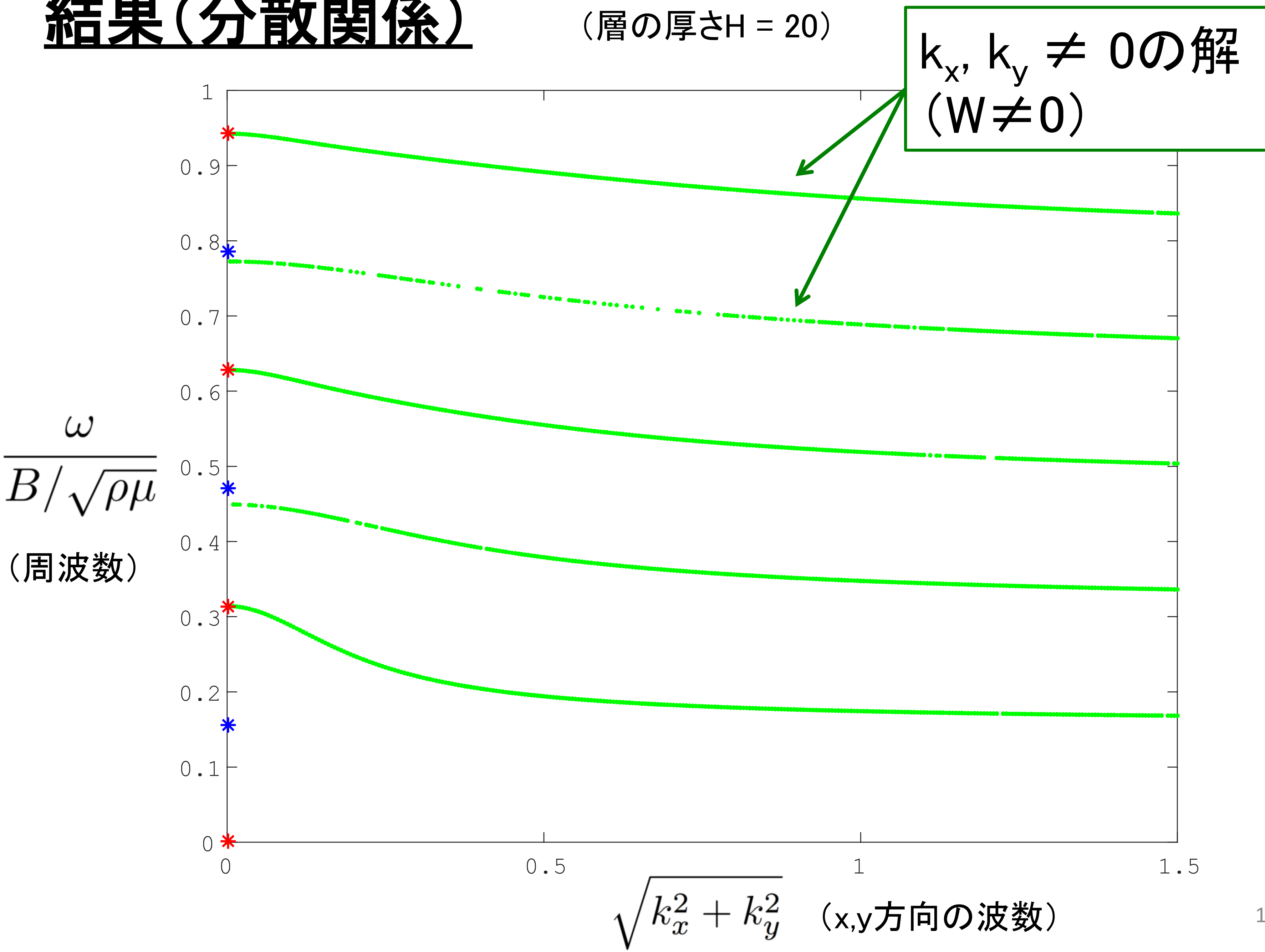
(H = 20)



$\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}}$
(周波数)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.5
1
1.5
k_x, k_yを最初から0にした解
連続の式より、
すべてのzで
速度場のz成分W=0の解に対応
$\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ (x,y方向の波数)

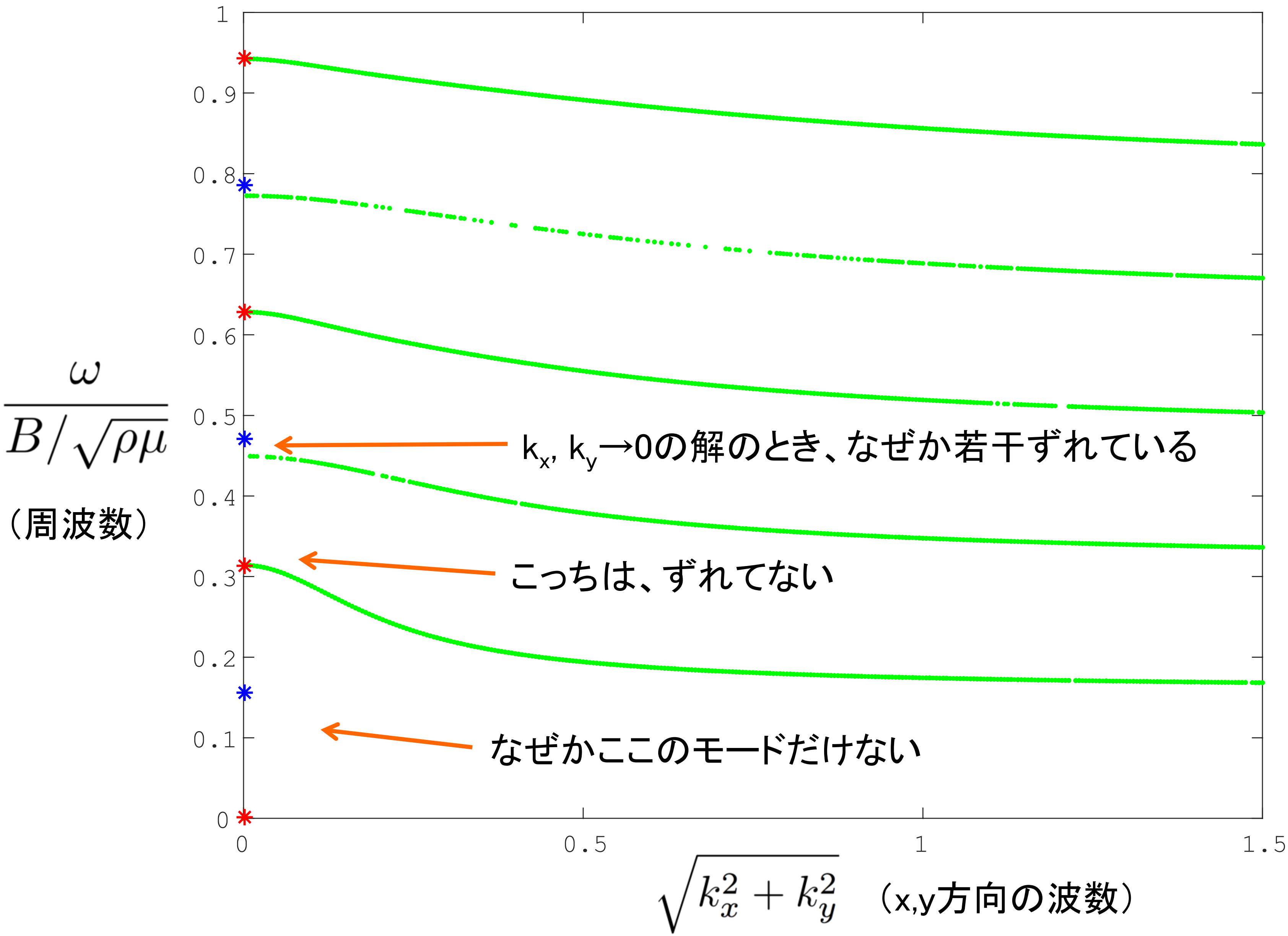
結果(分散関係)

（層の厚さH = 20）



結果(分散関係)

(層の厚さH = 20)



何が違うか？

渦度のz成分(Z)と、電流のz成分(J)の式は、2階の微分方程式

$$\begin{pmatrix} Z(z) \\ J(z) \end{pmatrix} = \sum_{k_x,k_y,\omega} \left\{ \begin{pmatrix} C_1^{(Z)} \\ C_1^{(J)} \end{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}} z\right) + \begin{pmatrix} C_2^{(Z)} \\ C_2^{(J)} \end{pmatrix} \sin\left(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}} z\right) \right\}$$

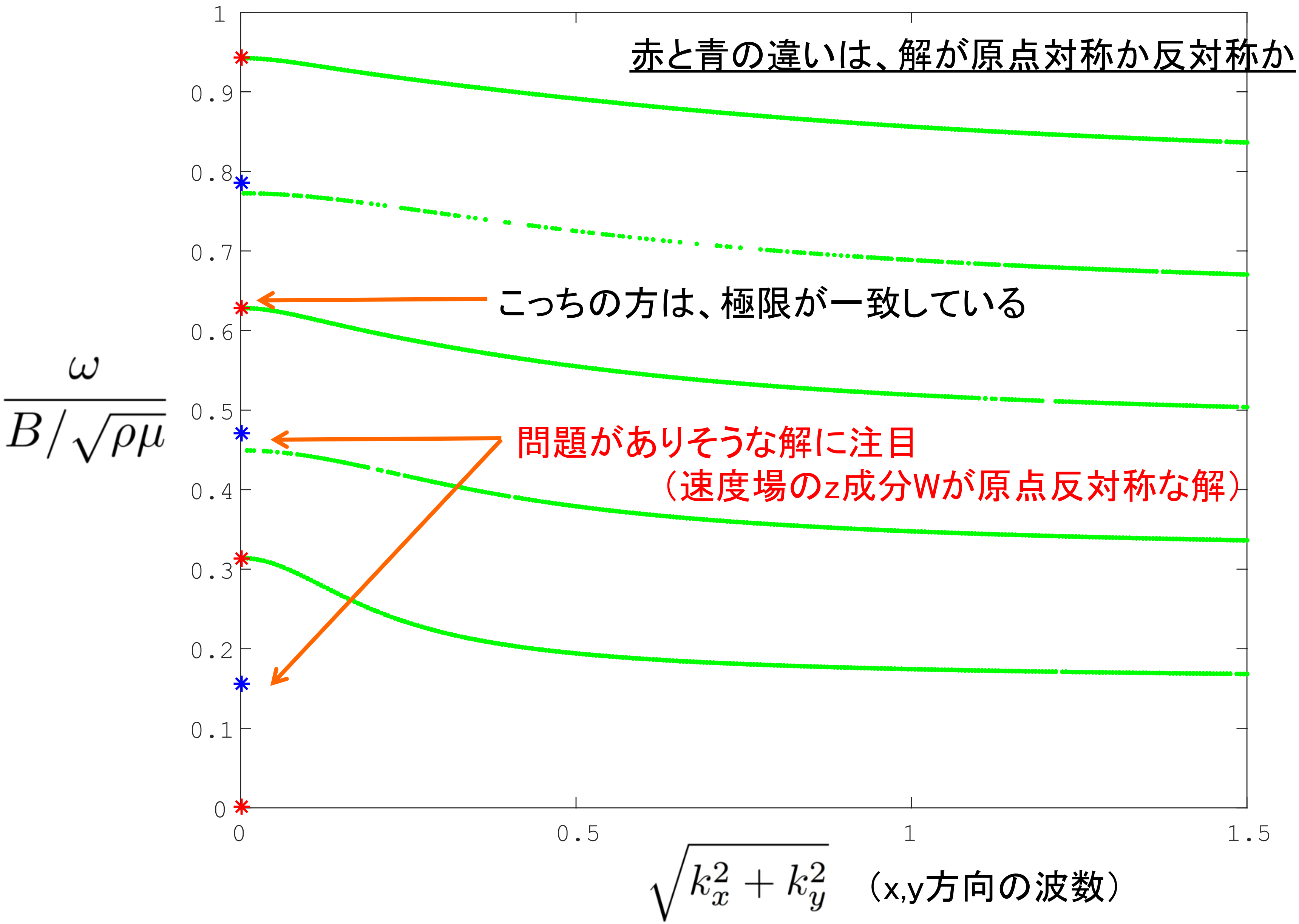
速度場のz成分(W)と、磁場のz成分(M)の式は、4階の微分方程式

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} W(z) \\ M(z) \end{pmatrix} = \sum_{k_x,k_y,\omega} \Bigg\{ & \begin{pmatrix} C_3^{(W)} \\ C_3^{(M)} \end{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}} z\right) + \begin{pmatrix} C_4^{(W)} \\ C_4^{(M)} \end{pmatrix} \sin\left(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}} z\right) \\ & + \begin{pmatrix} C_5^{(W)} \\ C_5^{(M)} \end{pmatrix} \cosh\left(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} z\right) + \begin{pmatrix} C_6^{(W)} \\ C_6^{(M)} \end{pmatrix} \sinh\left(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} z\right) \Bigg\} \end{aligned}$$

$k_x, k_y \neq 0$の時は、速度場のz成分(W)に
cosh, sinhの項がある

結果(分散関係)

(層の厚さH = 20)



$$W^{\mathrm{even}}(z) = \sum_{k_x,k_y,\omega} \left\{ C_3 \cos(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}} z) + C_5 \cosh(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} z) \right\}$$

$$W^{\mathrm{odd}}(z) = \sum_{k_x,k_y,\omega} \left\{ C_4 \sin(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}} z) + C_6 \sinh(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} z) \right\}$$

← こっちの解に注目

k_x, k_y = 0(W(z) = 0)の解

分散関係

$$\cos(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}} \frac{H}{2}) = 0$$

k_x, k_y ≠ 0(W(z) ≠ 0)の解

分散関係

$$\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \sin(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}} \frac{H}{2}) \cosh(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \frac{H}{2}) - \frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}} \cos(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}} \frac{H}{2}) \sinh(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \frac{H}{2}) = 0$$

k_x, k_y → 0とすると、

$$\sin(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}} \frac{H}{2}) - \frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}} \frac{H}{2} \cos(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}} \frac{H}{2}) = 0$$

違う分散関係になっている

まとめ

- 無限平板にはさまれた流体中の
  Alfvén波の分散関係を求めた。
- z方向の流れの存在を許すと、変な結果になった。
- この結果は何なのか、今のところよく分からない

何か物理的意味がある？
何か数学的意味がある？
それとも、どこかで間違った処理をした？

- 外核の中にも、torsional waveという回転が効かない、
  ほとんどAlfvén波の波があると思われているので、
  もしかしたら何か関係あるかもね
  （ただし、今考えてる問題は、壁が完全導体）

質問用
詳しい説明と式たち

考える系

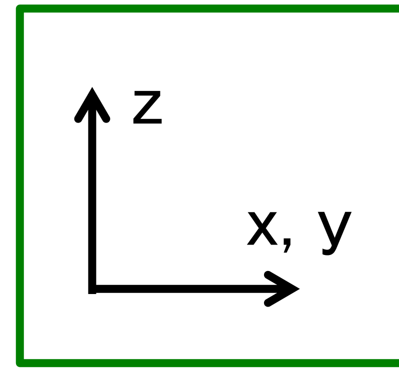
無限平板に、はさまれた流体を考える

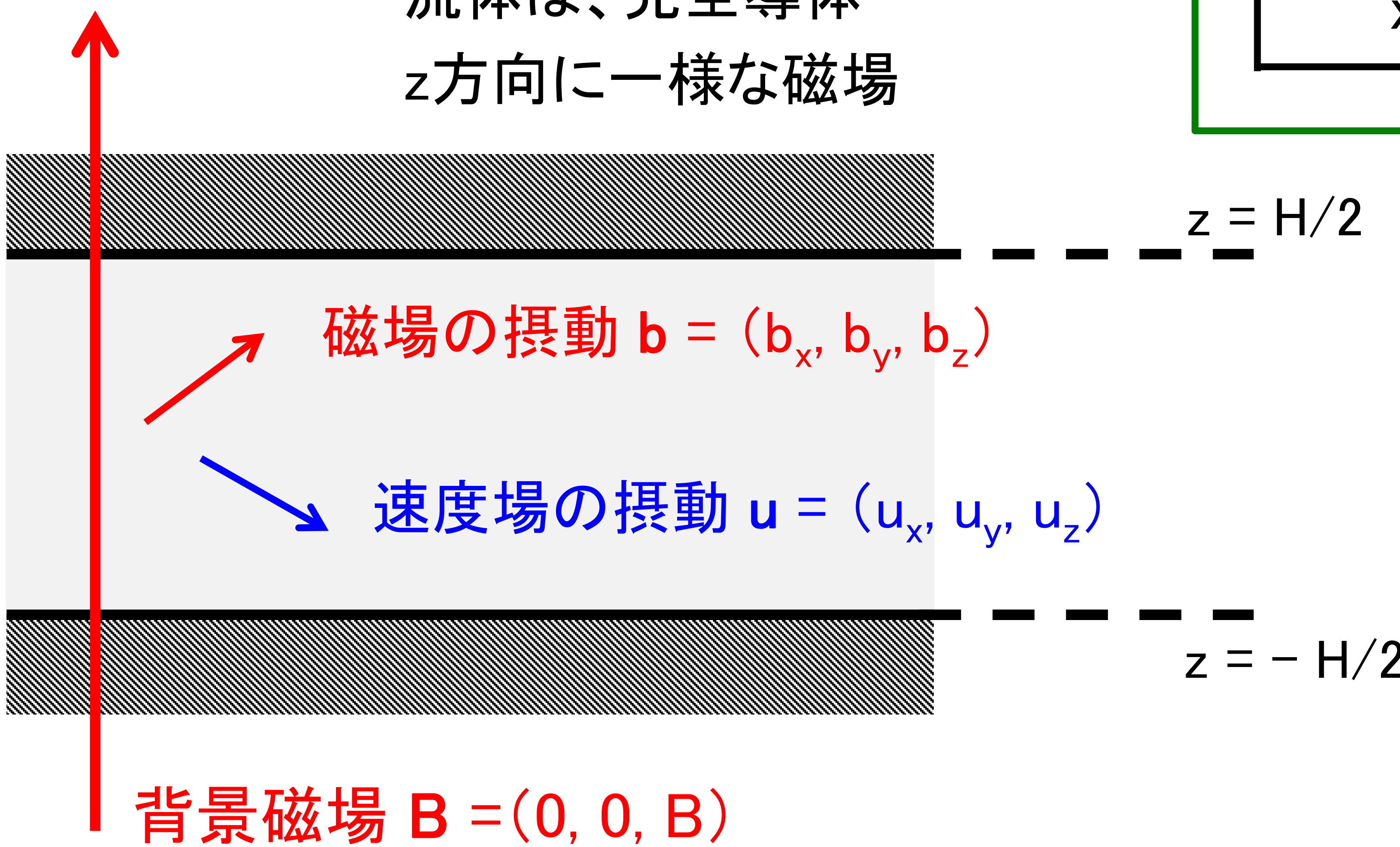
密度一様（ ρ = const. ）

非粘性

流体は、完全導体

z方向に一様な磁場





基礎方程式

B：背景磁場
u：速度場の摂動
b：磁場の摂動
ρ：密度
μ：透磁率
p：圧力

線形化

運動方程式（非粘性）　　磁気圧　　磁気張力

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\left(p + \frac{Bb_z}{\mu}\right) + \frac{B}{\mu}\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial z}$$

誘導方程式（ 非散逸（ 電気伝導度 → ∞ ））

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t} = B\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}$$

連続の式（非圧縮）、磁場に関するガウスの法則

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b} = 0$$

運動方程式に、rotをとる

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}) = \frac{B}{\rho\mu}\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{b})$$

もう一度、rotをとる（連続、磁場ガウスを利用）

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{u}) = \frac{B}{\rho\mu}\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{b})$$

B：背景磁場
u：速度場の摂動
b：磁場の摂動
ρ：密度
μ：透磁率

誘導方程式に、rotをとる

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{b}) = B\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u})$$

速度場 u と磁場 b には、

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{b} = 0$$

という条件があるので、3成分を2つの変数で表す。

今、z方向に壁があるので、
z成分とx,y成分に分けるのが良さそう。

z方向の単位ベクトル

速度の z 成分 $$u_z = \boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z$$

渦度の z 成分 $$\zeta_z = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z$$

磁場の z 成分 $$b_z = \boldsymbol{b} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z$$

電流の z 成分 $$j_z = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{b}) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z$$

よって、考える式は

B : 背景磁場
ρ : 密度
μ : 透磁率
u_z : 速度場の z成分
b_z : 磁場の z成分
ζ_z : 渦度のz成分
j_z : 電流のz成分

$$\frac{\partial \zeta_z}{\partial t} = \frac{B}{\rho\mu}\frac{\partial j_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial j_z}{\partial t} = B\frac{\partial \zeta_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u_z = \frac{B}{\rho\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)b_z$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = B\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

B: 背景磁場
ρ : 密度
μ : 透磁率
u_z : 速度場の z成分
b_z : 磁場の z成分
ζ_z : 渦度のz成分
j_z : 電流のz成分

式をまとめると、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{B^2}{\rho\mu}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\begin{pmatrix}\zeta_z \\ j_z\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{B^2}{\rho\mu}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\begin{pmatrix}u_z \\ b_z\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

水平方向には、波型の解を仮定

$$\begin{pmatrix}\zeta_z(x,y,z,t) \\ j_z(x,y,z,t) \\ u_z(x,y,z,t) \\ b_z(x,y,z,t)\end{pmatrix} = \Re\left[\begin{pmatrix}Z(z) \\ J(z) \\ W(z) \\ M(z)\end{pmatrix} e^{i(k_x x + k_y y)} e^{-i\omega t}\right]$$

すると、zについての常微分方程式になる

B : 背景磁場
ρ : 密度
μ : 透磁率
W : 速度場の z成分
M : 磁場の z成分
Z : 渦度のz成分
J : 電流のz成分

$$\left(\omega^2 + \frac{B^2}{\rho\mu}\frac{d^2}{dz^2}\right)\begin{pmatrix} Z \\ J \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\left(\omega^2 + \frac{B^2}{\rho\mu}\frac{d^2}{dz^2}\right)\left(\frac{d^2}{dz^2} - (k_x^2 + k_y^2)\right)\begin{pmatrix} W \\ M \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

ちなみに、水平成分はZ,W,J,Mで書き表せる。

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \Re\Big[\frac{1}{k_x^2 + k_y^2}\Big(\begin{pmatrix} ik_x \\ ik_y \end{pmatrix}\frac{dW}{dz} + \begin{pmatrix} ik_y \\ -ik_x \end{pmatrix} Z\Big)e^{i(k_x x + k_y y)}e^{-i\omega t}\Big]$$

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \Re\Big[\frac{1}{k_x^2 + k_y^2}\Big(\begin{pmatrix} ik_x \\ ik_y \end{pmatrix}\frac{dM}{dz} + \begin{pmatrix} ik_y \\ -ik_x \end{pmatrix} J\Big)e^{i(k_x x + k_y y)}e^{-i\omega t}\Big]$$

渦度のz成分と、電流のz成分の式は、2階の微分方程式

$$\begin{pmatrix} Z(z) \\ J(z) \end{pmatrix} = \sum_{k_x, k_y, \omega} \left\{ \begin{pmatrix} C_1^{(Z)} \\ C_1^{(J)} \end{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}} z\right) + \begin{pmatrix} C_2^{(Z)} \\ C_2^{(J)} \end{pmatrix} \sin\left(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}} z\right) \right\}$$

速度場のz成分と、磁場のz成分の式は、4階の微分方程式

$$\begin{pmatrix} W(z) \\ M(z) \end{pmatrix} = \sum_{k_x, k_y, \omega} \left\{ \begin{pmatrix} C_3^{(W)} \\ C_3^{(M)} \end{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}} z\right) + \begin{pmatrix} C_4^{(W)} \\ C_4^{(M)} \end{pmatrix} \sin\left(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}} z\right) \right.$$
$$\left. + \begin{pmatrix} C_5^{(W)} \\ C_5^{(M)} \end{pmatrix} \cosh\left(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} z\right) + \begin{pmatrix} C_6^{(W)} \\ C_6^{(M)} \end{pmatrix} \sinh\left(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} z\right) \right\}$$

境界条件を与えると、定数部分が決まる。

B : 背景磁場
ρ : 密度
μ : 透磁率
W : 速度場の z成分
M : 磁場の z成分
Z : 渦度のz成分
J : 電流のz成分

境界条件

流体部分　→　非粘性、完全導体
壁　　　　→　絶縁体 or 完全導体 or ...

壁の種類が何であれ、壁のところで満たすべき条件

- 速度のz成分(u_z)が0　→　W = 0
- 磁場のz成分(b_z)が連続(∵ 磁場ガウス)
- 電場のx,y成分(e_x, e_y)が連続(∵ ファラデー)
- 電流のz成分(j_z)が連続(∵ MHD近似での電荷保存)

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{j} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{b}) = 0}$$

境界条件は、

ZとJが、1×(上下の壁)=2コ （2階微）

WとMが、2×(上下の壁)=4コ （4階微）

ほしい

W:速度場の z成分
M:磁場の z成分
Z:渦度のz成分
J:電流のz成分

ただし、k_x, k_y=0の時は、

連続の式より(dW/dz)=0

壁で W=0 なので、

すべてのzで W=0 になる

よって、k_x, k_y=0の時は、

ZとJだけ考えれば良い

W(z) = 0 の解の境界条件

$$\frac{\partial j_z}{\partial t} = B\frac{\partial \zeta_z}{\partial z}$$

壁が絶縁体のとき

$$J = 0\,(\text{絶縁体には電流が流れないので}) \rightarrow \frac{dZ}{dz} = 0$$

壁が完全導体のとき

B : 背景磁場
ρ : 密度
μ : 透磁率
W : 速度場の z成分
M : 磁場の z成分
Z : 渦度のz成分
J : 電流のz成分
e : 電場

完全導体のときのオームの法則（線形化）

（流体側）　$\boldsymbol{e} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$

（壁側）　$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$

電場のx,y成分が連続　→　速度場のx,y成分が0

$$Z = 0 \rightarrow \frac{dJ}{dz} = 0$$

$$\frac{\partial \zeta_z}{\partial t} = \frac{B}{\rho\mu}\frac{\partial j_z}{\partial z}$$

W(z) = 0の解 →

$$\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}} = \frac{n\pi}{H} \quad (n \text{ は整数})$$

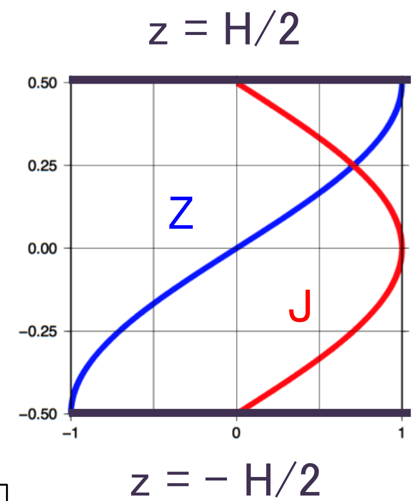
B : 背景磁場
ρ : 密度
μ : 透磁率
W : 速度場の z成分
M : 磁場の z成分
Z : 渦度のz成分
J : 電流のz成分

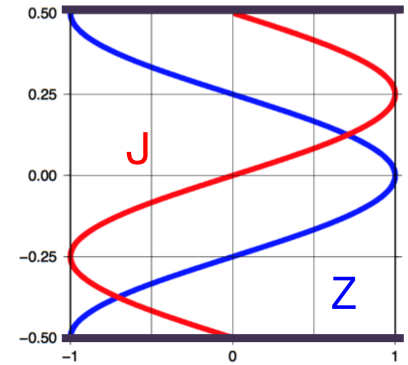
壁が絶縁体のとき

B.C.

$$J = 0$$

$$\frac{dZ}{dz} = 0$$





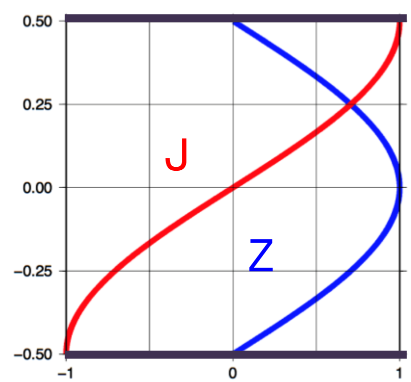
…

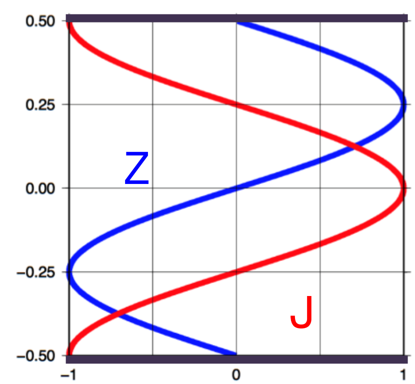
壁が完全導体のとき

B.C.

$$Z = 0$$

$$\frac{dJ}{dz} = 0$$





…

速度場のz成分W(z) ≠ 0 のときは？

（予想）

連続の式より、k_x、k_y → 0のとき、
W(z) = 0の解に近づきそう

W(z) ≠ 0 の解の境界条件

B: 背景磁場
ρ: 密度
μ: 透磁率
W: 速度場の z成分
M: 磁場の z成分
Z: 渦度のz成分
J: 電流のz成分

壁が絶縁体のとき

$$J = 0$$

$$\frac{dZ}{dz} = 0$$

+

$$W = 0$$

M はポテンシャル磁場と連続

壁の中まで真面目に解かないと
境界条件が足りないので、
絶縁体の場合は、とりあえずパス

W(z) ≠ 0 の解の境界条件

B : 背景磁場
ρ : 密度
μ : 透磁率
W : 速度場の z成分
M : 磁場の z成分
Z : 渦度のz成分
J : 電流のz成分

壁が完全導体のとき

$$Z=0$$

$$\frac{dJ}{dz}=0$$

$+$

$$W=0$$

連続の式

$$\text{速度場の } x, y \text{ 成分} = 0 \rightarrow \frac{dW}{dz}=0 \rightarrow M=0$$

$$\boxed{\frac{\partial b_z}{\partial t}=B\frac{\partial u_z}{\partial z}}$$

いま、

Wに関する境界条件が4つそろったので、

W、Z、Jに関して解くことができる。

W(z) ≠ 0 の解の分散関係を求める

B：背景磁場
ρ：密度
μ：透磁率
W：速度場の z成分
M：磁場の z成分
Z：渦度のz成分
J：電流のz成分

一般解

$$W(z) = \sum_{k_x, k_y, \omega} \Big\{ C_3 \cos\Big(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}} z\Big) + C_4 \sin\Big(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}} z\Big) + C_5 \cosh\Big(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} z\Big) + C_6 \sinh\Big(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} z\Big) \Big\}$$

境界条件

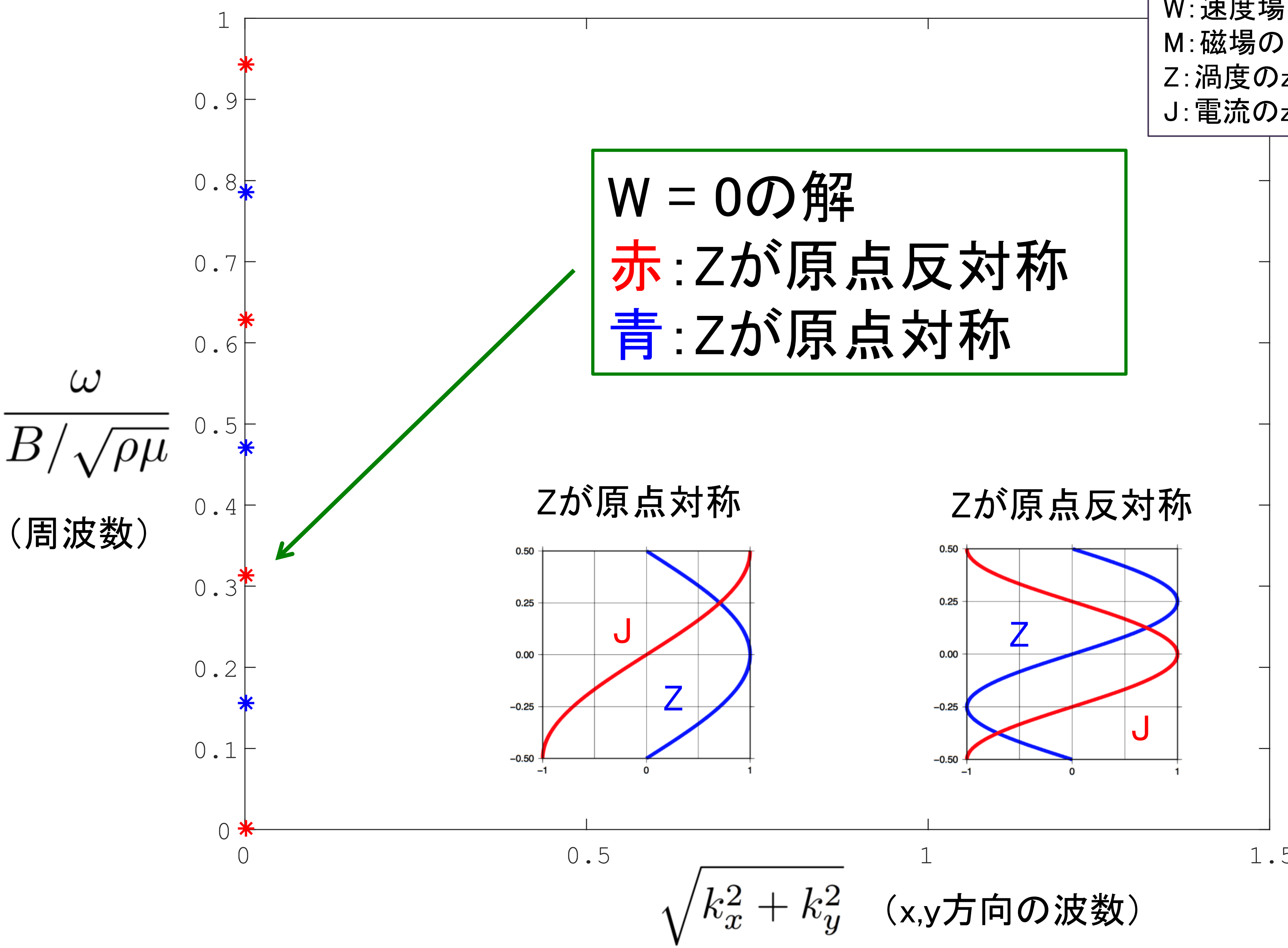
$$W = 0, \quad \frac{dW}{dz} = 0 \qquad (\text{at} \quad z = \pm\frac{H}{2})$$

C_3～C_6が自明でない解を持つ → ４×４の行列式＝0
（分散関係）

結果(分散関係)

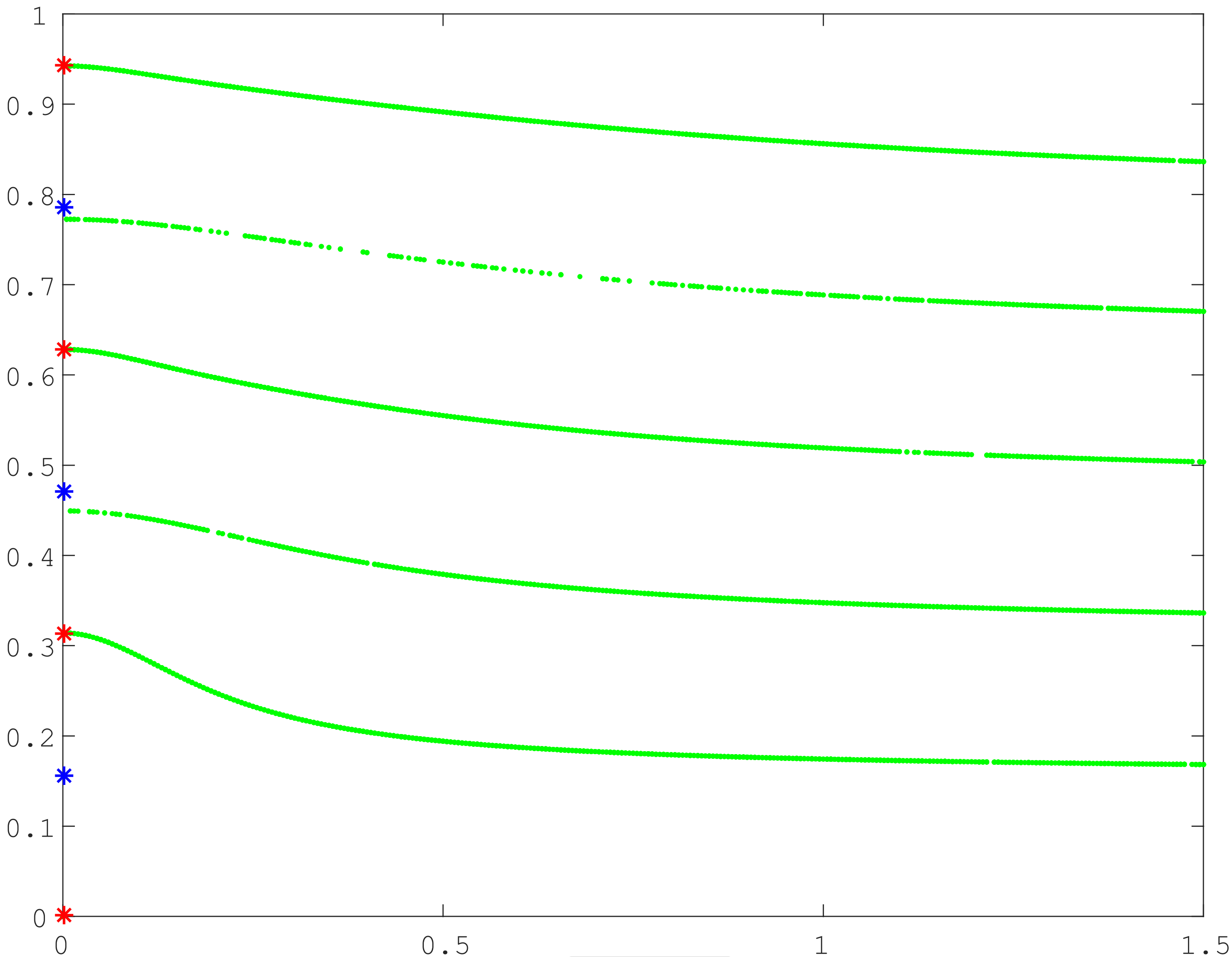
(層の厚さH = 20)

B : 背景磁場
ρ : 密度
μ : 透磁率
W : 速度場の z成分
M : 磁場の z成分
Z : 渦度のz成分
J : 電流のz成分



結果(分散関係)

(層の厚さH = 20)



$$\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}}$$

(周波数)

$$\sqrt{k_x^2+k_y^2}$$

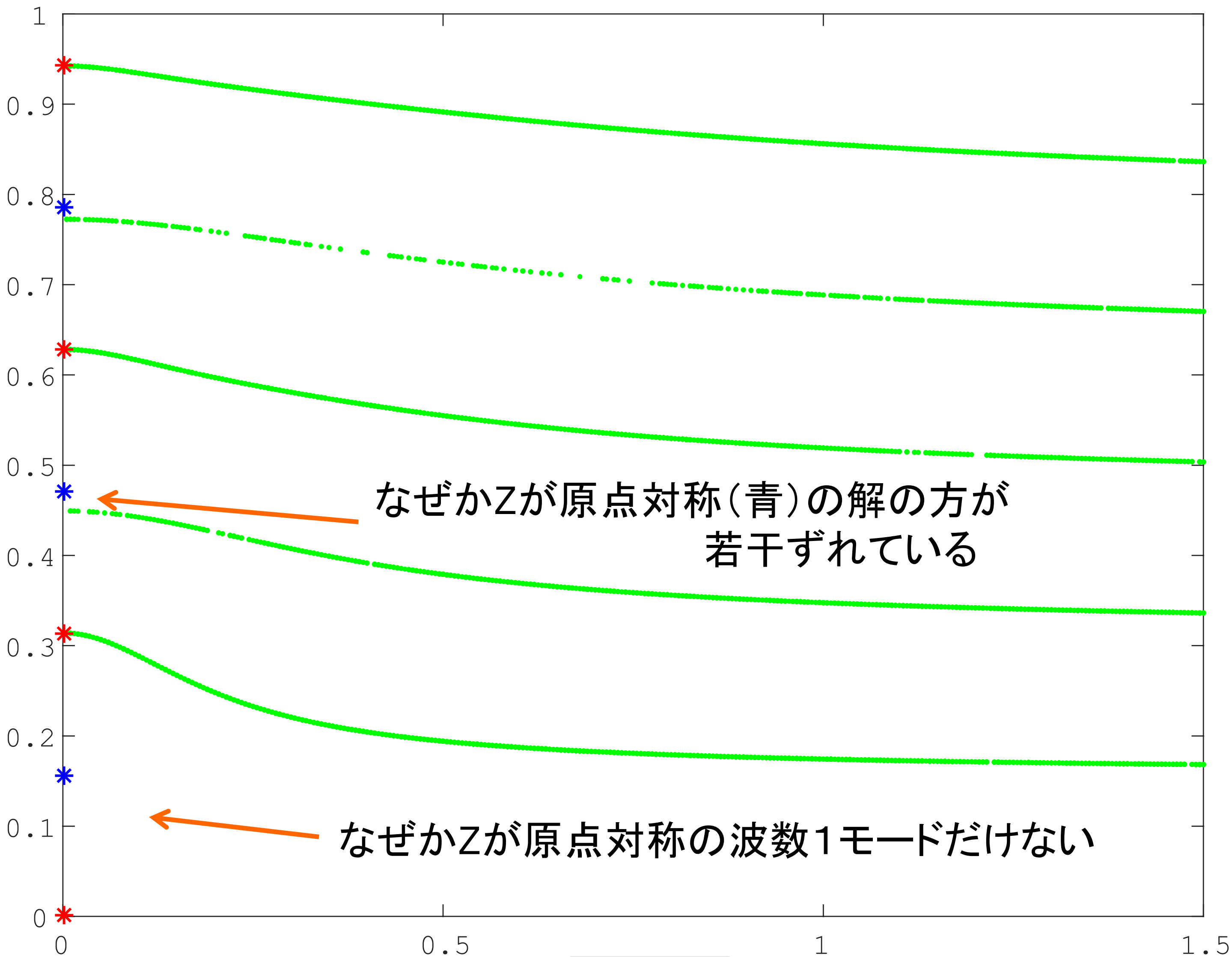
(x,y方向の波数)

結果(分散関係)

(層の厚さH = 20)

$$\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}}$$

(周波数)



$$\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$ (x,y方向の波数)

原点対称解と反対称解に分解

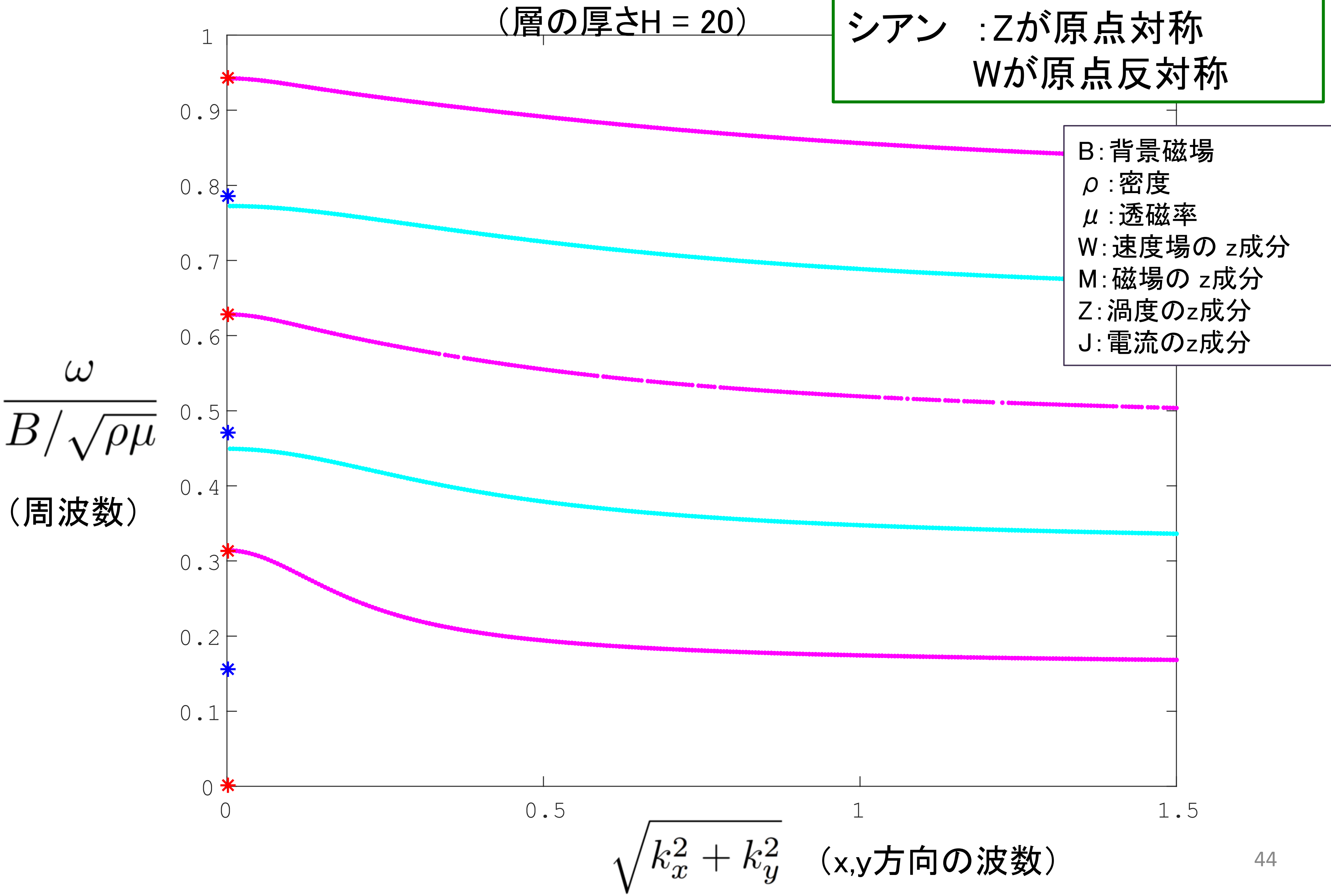
$$W^{\mathrm{even}}(z) = \sum_{k_x,k_y,\omega} \left\{ C_3 \cos\left(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}} z\right) + C_5 \cosh\left(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} z\right) \right\}$$

$$W^{\mathrm{odd}}(z) = \sum_{k_x,k_y,\omega} \left\{ C_4 \sin\left(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}} z\right) + C_6 \sinh\left(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} z\right) \right\}$$

原点対称解と反対称解に分けて、
それぞれで分散関係を求めてみる

B:背景磁場
ρ :密度
μ :透磁率
W:速度場の z成分
M:磁場の z成分
Z:渦度のz成分
J:電流のz成分

結果（分散関係）



（層の厚さH = 20）
マゼンダ：Zが原点反対称
Wが原点対称
シアン　：Zが原点対称
Wが原点反対称
B：背景磁場
ρ：密度
μ：透磁率
W：速度場の z成分
M：磁場の z成分
Z：渦度のz成分
J：電流のz成分
$\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}}$
（周波数）
$\sqrt{k_x^2+k_y^2}$
（x,y方向の波数）
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
0.5
1
1.5

B:背景磁場
ρ :密度
μ :透磁率
H:層の厚さ

Wが原点対称、Zが原点反対称

分散関係

$$\sqrt{k_x^2+k_y^2}\cos\left(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}}\frac{H}{2}\right)\sinh\left(\sqrt{k_x^2+k_y^2}\frac{H}{2}\right)+\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}}\sin\left(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}}\frac{H}{2}\right)\cosh\left(\sqrt{k_x^2+k_y^2}\frac{H}{2}\right)=0$$

k_x, k_y → 0とすると、

$$\sin\left(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}}\frac{H}{2}\right)\to 0$$

W(z) = 0の解の分散関係 と一 $\sin\left(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}}\frac{H}{2}\right)=0$

Wが原点反対称、Zが原点対称

分散関係

$$\sqrt{k_x^2+k_y^2}\sin\left(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}}\frac{H}{2}\right)\cosh\left(\sqrt{k_x^2+k_y^2}\frac{H}{2}\right)-\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}}\cos\left(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}}\frac{H}{2}\right)\sinh\left(\sqrt{k_x^2+k_y^2}\frac{H}{2}\right)=0$$

k_x, k_y → 0とすると、

$$\sin\left(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}}\frac{H}{2}\right)-\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}}\frac{H}{2}\cos\left(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}}\frac{H}{2}\right)=0$$

よって、W(z) = 0の解の分散関係 $\cos\left(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}}\frac{H}{2}\right)=0$

$$\sin\left(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}}\frac{H}{2}\right) - \frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}}\frac{H}{2}\cos\left(\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}}\frac{H}{2}\right) = 0$$

B：背景磁場
ρ：密度
μ：透磁率
H：層の厚さ

$$\frac{\omega}{B/\sqrt{\rho\mu}} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon$$

代入して、ずれεを求める

$$\tan(\varepsilon) = -\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon}$$

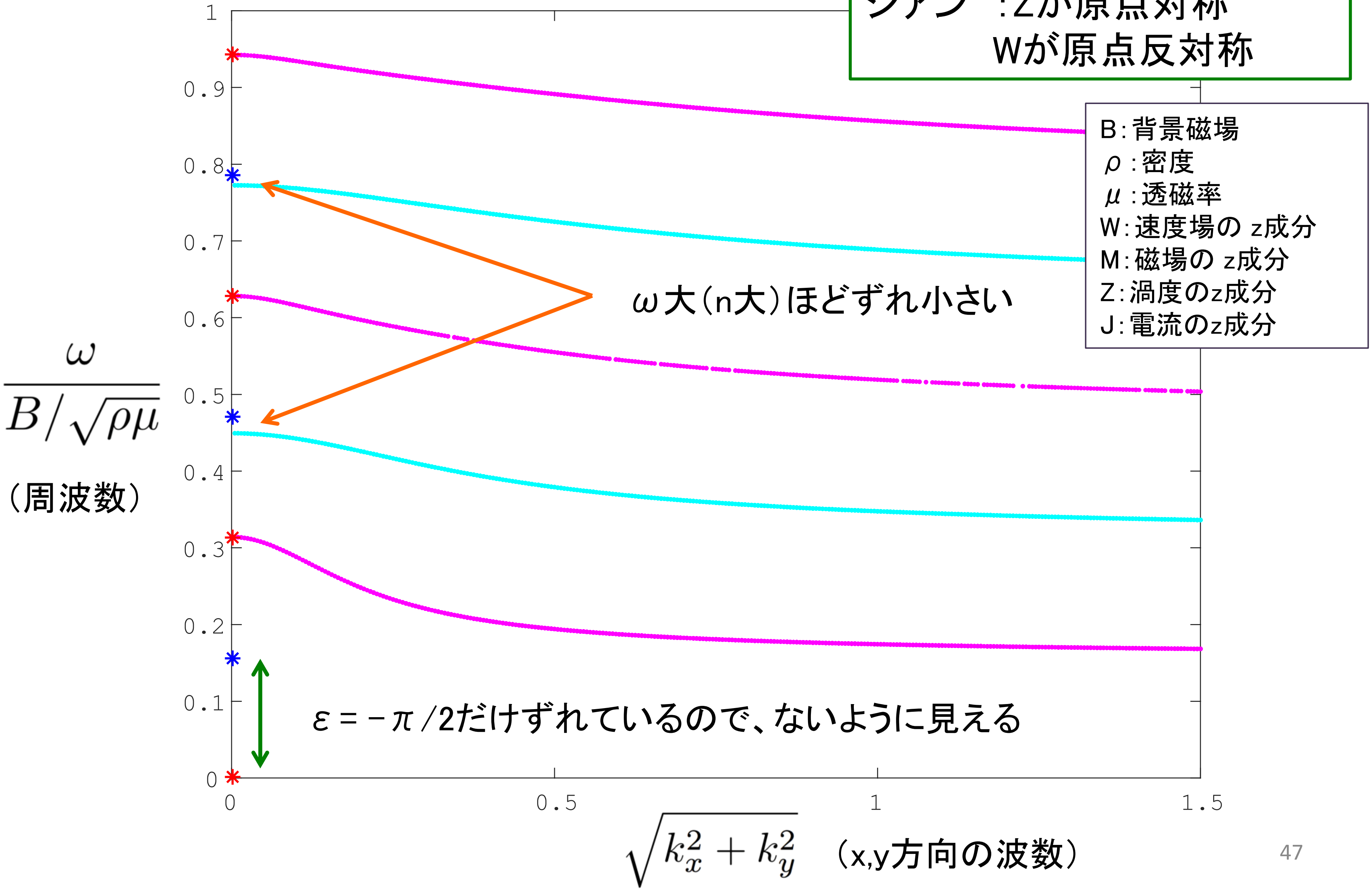
これを満たすεがずれ

これから分かること

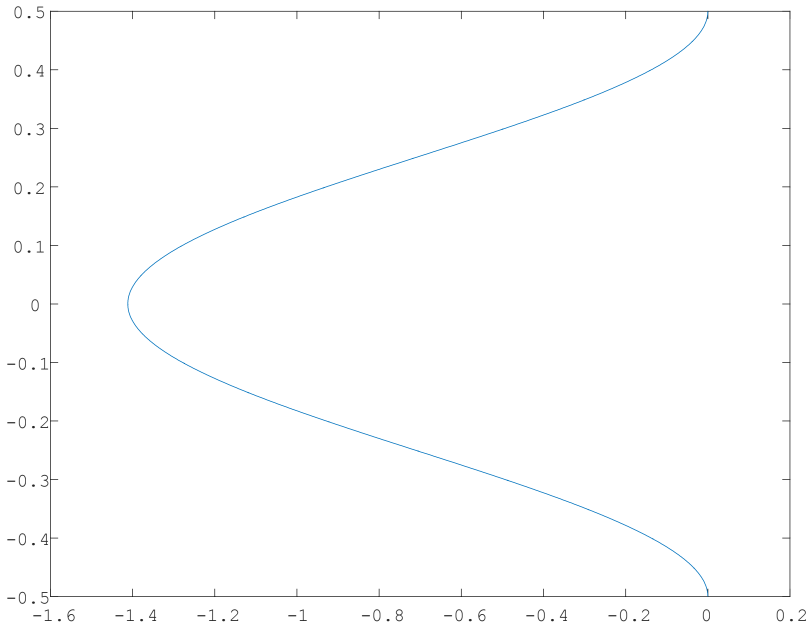
- nが大きい（ωが大きい）ほど、εは小さい
- ずれの最大値　n=0のとき → ε＝－π/2
  この時、ω＝0

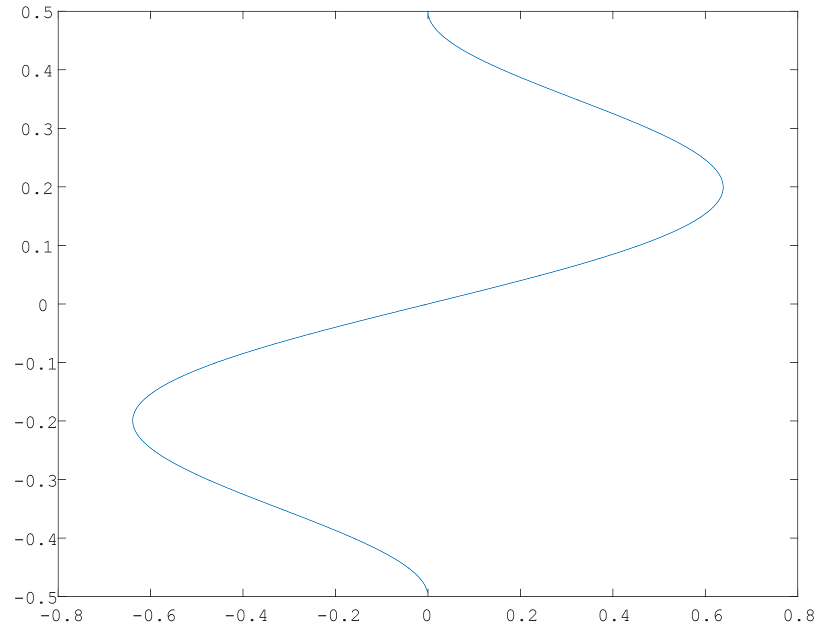
(層の厚さ H = 20)

マゼンダ:Zが原点反対称
Wが原点対称
シアン :Zが原点対称
Wが原点反対称

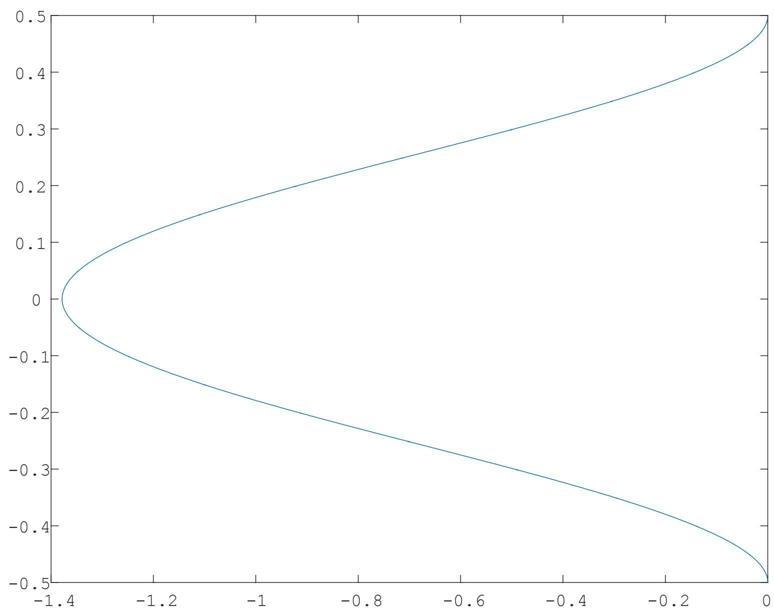


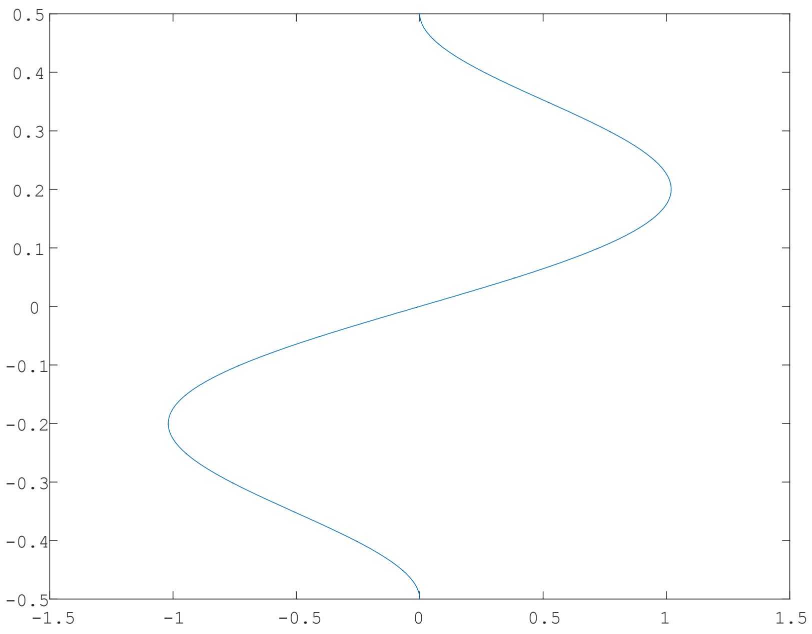
$\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ = 0.05のときのW(z)





$\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ = 0.1のときのW(z)





$\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ = 0.3のときのW(z)